Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Humanidades
Departamento de Filosofía

LA NOCIÓN DE DEFINICIÓN EN LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE GOTTLOB FREGE

Tesis presentada como parte de
los requisitos para el otorgamiento del grado de:
Maestría en Artes

José Ernesto Mieres Alvarez

Mayo de 1997

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente la ayuda y el apoyo prestados para la realización de este trabajo por parte de mi director de tesis, el Dr. Guillermo E. Rosado Haddock, quien desde mi primer semestre en la Universidad de Puerto Rico, cuando me matriculé en su curso de Lógica Simbólica I, ha sido un ejemplo de rigor y dedicación en la vida académica, así como también un valioso mentor para el que escribe.

Dedico esta tesis a Arlette de Jesús, con quien he tenido la dicha de haber compartido tanto la interminable labor como la grata satisfacción que la misma conlleva.

Indice General

Introducción

Las definiciones son y han sido un tema central en la filosofía. Si tomamos a Sócrates como una figura representativa del pasado helénico de la filosofía occidental, no podemos dudar de la importancia que tienen las definiciones sobre todo discurso filosófico. El maestro de Platón, como se sabe, se jactaba en demostrarle a sus distinguidos contrincantes que, sin una definición clara y precisa del tema en cuestión—ya sea la oratoria, la justicia, la belleza, la santidad, la educación, la virtud, entre otros—, no era posible sostener ninguna tesis acerca de dicho tema sin caer en alguna inconsistencia. Posteriormente, el mismo Platón y su discípulo Aristóteles se ocuparon de estudiar las definiciones consideradas por sí mismas.[1] Más tarde, los pensadores de la escolástica dieron origen a una sostenida discusión en torno a la distinción entre definiciones reales y definiciones nominales durante toda la época medieval. Y luego, filósofos de la época moderna como Francis Bacon, Thomas Hobbes, René Descartes, Blaise Pascal, y Baruch de Spinoza, entre otros, se ocuparon directamente de la naturaleza de las definiciones, a la misma vez que hicieron grandes contribuciones en algunos casos tanto a la matemática como a las ciencias naturales. No nos queda duda, pues, de que el tema de las definiciones es uno que debe ser explorado a todo lo largo de la tradición filosófica.

Por otro lado, la matemática, término que en su origen etimológico significa simplemente "lecciones", es un saber humano que además de contribuir a las demás ciencias mediante la aportación de una perspectiva cuantitativa y formal al objeto de estudio, sirve también como modelo de

[1]La concepción más famosa de Platón, la de definición por división, se encuentra desarrollada en *El Sofista*. Aristóteles expone directamente su concepción de la definición en *Topica* I,5; y en *Analitica Posteriora* II, 8-10.

rigor al considerársele en sí misma. Seguramente dicho valor paradigmático contribuyó a que no se le llamase simplemente aritmética o quizás en español "numerología", pues ya Platón en su esbozo de una educación propia para la ciudad ideal había dicho que la aritmética no sólo instruía acerca de los números, sino que también enseña a los intelectos el patrón de una ciencia que alcanza la luz de la verdad. Por lo tanto, puesto que también es una "lección" que es requerida para toda arte, intelección o ciencia, es necesario que se aprenda primero.[2] Nos parece entonces más que apropiado hacer un acercamiento al tema de las definiciones tomando como ejemplo las definiciones en la matemática, ciencia cuyo rigor ha sido admirado por los filósofos a partir del origen mismo de la filosofía en Grecia, en donde las escuelas filosóficas, de los pitagóricos primero y de los platónicos después, se encargaron de hacer de ella una central para todo saber humano.

Para poder hacer un acercamiento fructífero al tema de las definiciones, examinamos en el presente trabajo la obra de Gottlob Frege (1848-1925), el cual, si bien laboró durante toda su vida en la Universidad de Jena como un profesor de matemáticas, contribuyó muy significativamente a la filosofía de la matemática del siglo veinte. Sus escritos han sido también de gran influencia en la filosofía del lenguaje que ha surgido en nuestros tiempos, y especialmente en la corriente de la filosofía analítica que ha predominado en el ámbito académico anglo-norteamericano. Y sin lugar a dudas, su contribución a la lógica ha sido la principal responsable del vertiginoso desarrollo en el siglo veinte de dicha ciencia formal, que anteriormente había sido considerada perfeccionada y agotada por el gran filósofo alemán Immanuel Kant.

---

[2]Platón, *La república* , Alianza Ed., VII, 522 c.

Durante los últimos treinta años, ha habido un singular aumento en el estudio de la filosofía de Frege y se han publicado diversas traducciones de sus obras. Entre los filósofos que han publicado recientemente sobre él, podemos destacar a Michael Dummett, Hans Sluga, Michael D. Resnik, Ignacio Angelelli, Matthias Schirn, Christian Thiel, y Claude Imbert, entre otros. Sus trabajos sobre Frege han tratado principalmente de la filosofía de la matemática, la lógica y el lenguaje. Algunos se han referido directamente a la concepción de Frege acerca de las definiciones.[3] Y como es de esperarse, no existe un acuerdo entre los estudiosos de Frege en cuanto a dicha concepción.[4]

La presente tesis contempla entonces examinar detenida y exclusivamente el tema de las definiciones en la matemática en la obra de Frege. En los dos primeros capítulos, examinamos la noción de definición según aparece en las dos obras más conocidas de Frege: su *Grundlagen der Arithmetik*, publicada en 1884, y su *Grundgesetze der Arithmetik*, publicada en dos volúmenes en 1893 y 1903, respectivamente. En los dos subsiguientes capítulos, complementaremos dicho examen, presentando la noción de definición de Frege, primero según una polémica que mantuviera durante los años 1899-1900 con el matemático David Hilbert, y finalmente según un artículo inédito suyo, redactado alrededor del 1914.

En *Die Grundlagen der Arithmetik*, obra que inicia las páginas de la filosofía de la matemática contemporánea, Frege critica agudamente los

---

[3]El tema de las definiciones en Frege ha sido tratado a manera de apartado, por ejemplo en R. Grossmann, *Reflexions on Frege's Philosophy*, pp. 248-253; en M. Dummett, *The Interpretation of Frege's Philosophy*, pp. 254-261, *Frege: Philosophy of Mathematics*, pp.155-180, *Frege and Other Philosophers*, pp. 1-17, 126-158; en M. Resnik *Frege and the Philosophy of Mathematics*, pp. 39-47, 110-115; y de una manera más directa en J. Weiner, *Frege in Perspective*, pp. 83-133; en E.-H. W. Kluge, *The Metaphysics of Gottlob Frege* ; y en artículos como los de Alfonso Avila, "La definición de número en Gottlob Frege", J.F. Horty , "Frege on the Psychological Significance of Definitions" , y en M. Schirn, "Frege on the Purpose and Fruitfulness of Definitions", entre otros.

[4]Vemos, por ejemplo, el contraste entre una interpretación que presume una cierta coherencia a través de la obra fregeana como la de J. Weiner *Frege in Perspective* y unas que contrastan expresiones por parte de Frege acerca de las definiciones que aparentan ser irreconciliables como las de los artículos de J.F. Horty y M. Schirn mencionados en la nota arriba.

intentos previos de definir o esclarecer los elementos fundamentales de la aritmética, es decir los números. Según Frege, sin una definición precisa del concepto de número —el cual distingue de los números individuales— no es posible obtener un rigor apropiado en las investigaciones de la aritmética.[5] En particular, estudiamos la relación de las definiciones que ofrece Frege con su proyecto logicista para la aritmética, los criterios que usa Frege en esta obra para aceptar o rechazar una definición dada, los supuestos ontológicos que están a la base de su concepción, sus varios intentos para definir el concepto de número, entre otros temas. Frege hace uso en esta obra de su llamado principio del contexto, según el cual hay que buscar el significado de una palabra en el contexto de una oración y no en aislamiento. Investigamos pues cuál fue su posición en cuanto a las definiciones contextuales.

En *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), obra que pretendía demostrar la reductibilidad de la aritmética a la lógica, Frege trata el tema de las definiciones con mayor detenimiento.[6] Habiendo desarrollado su distinción entre sentido y denotación durante los años que separan a dichas dos obras, Frege se ve obligado a tomar en cuenta dicha distinción fundamental a la hora de caracterizar y establecer reglas para sus definiciones. A su vez, encontramos que la manera en que Frege describe las definiciones que ofrece nos permite ver con cierta claridad algunas limitaciones de dicha distinción semántica. Por otro lado, examinamos dos principios para las definiciones que Frege discute en dicha obra, a saber, el principio de completud y el principio de referencialidad. En particular, salta a la vista el hecho de que ambos principios encuentran problemas en su aplicación precisamente con relación

[5]*Die Grundlagen der Arithmetic*, §1.

[6]Algunos de los pasajes principales referentes a las definiciones en los *Grundgesetze* se encuentran en traducción inglesa en la sección titulada "Frege on Definitions", en P. Geach y M. Black, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, 139-161.

a la noción lógica más problemática del sistema lógico de esta obra, el curso de valores de una función. La introducción de dicha noción, conjuntamente con la aplicación sin restricciones del mencionado principio de completud, provocó que el sistema lógico de Frege fuera hallado inconsistente por el matemático inglés Bertrand Russell. Finalmente, destacamos la caracterización que hace Frege de las definiciones ofrecidas en el lenguaje objeto de su sistema.

En el capítulo tercero se examinan las críticas que hace Frege a la concepción de las definiciones que el matemático alemán David Hilbert ofrece en su obra *Grundlagen der Geometrie* (1899). Frege inició una correspondencia con Hilbert para expresarle sus objeciones. Pero, luego de que Hilbert desistiera de continuar dicho intercambio, Frege publicó sus puntos de vista en una colección de artículos titulados "Über die Grundlagen der Geometrie" (1903,1906). En esta ocasión, vemos a Frege expresar su concepción de las definiciones no con relación a la aritmética como en los conocidos escritos ya mencionados, sino con relación a la geometría. Este hecho es significativo, pues si bien Frege tuvo una concepción elaborada, innovadora y pretenciosa de la aritmética, este no fue el caso con la geometría. En cuanto a ésta última, tuvo una concepción conservadora que según sus propias palabras era similar a la de Kant, pues declaró sus axiomas sintéticos a priori.[7]

Frege contrastó la noción de axioma con la noción de definición, rechazando así la tesis de Hilbert mediante la cual se le restaba importancia a dicha distinción y se pretendían utilizar conjuntos de axiomas para definir las nociones fundamentales de la geometría como punto, línea, plano, así como

[7]G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§14, 64, 89, 103, 109.

relaciones entre estas últimas.[8] A la misma vez, Frege argumentó en contra de la tesis de Hilbert que tomaba a la noción de consistencia como criterio de existencia y verdad. Por otro lado, en la correspondencia con Hilbert, Frege introduce la noción de oración explicativa, la cual describe como responsable de aclarar el significado de los términos primitivos de un sistema.

Finalmente, en el cuarto capítulo examinamos la exposición sobre las definiciones que ocupa parte del artículo de Frege titulado "Logik in der Mathematik" (1914), publicado póstumamente. En dicho artículo, representativo en parte de la filosofía madura de un Frege que ya había aceptado el fracaso de su proyecto de reducir totalmente la aritmética a la lógica, Frege parece tomar cierta distancia de sus escritos anteriores, desarrollando una suerte de teoría de la definición. Distingue entre dos tipos de definiciones: la constructiva y la analítica. Sin embargo, aun cuando las descripciones que ofrece de dichos tipos de definiciones parecen contrastar con tesis anteriores suyas acerca de la definiciones, Frege no utiliza dicha distinción para examinar su práctica definitoria en obras anteriores.

Esperamos, al finalizar, que el resultado de este trabajo sea un primer paso en una serie de investigaciones en torno al problema filosófico de las definiciones. Cumplida una tarea educativa, tan solo comienza una vía filosófica. Sin duda, el admirable rigor de los escritos de Frege, que permite destacar las limitaciones de sus concepciones, y que a su vez impide al estudioso el proponer soluciones infructíferas, será una guía segura en dicho camino.

---

[8]David Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie*, §1.

Capítulo I: *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884)

§1 El proyecto logicista y la estrategia general de Frege

Habiendo visto el frío recibimiento que fue objeto su *Begriffsschrift* de 1879 (en lo sucesivo *BS)*, Frege se dio a la tarea de escribir un libro de filosofía de la matemática que no fuera tan tedioso para leer como aquél, pero que también reflejase su enfoque riguroso y a la misma vez innovador tanto de la lógica como de la matemática. El resultado de este esfuerzo fue un libro que ha quedado como un modelo para la filosofía de la matemática posterior, el llamado *Die Grundlagen der Arithmetik* de 1884 que nos ocupa (subsiguientemente *GlA)*. En él, Frege se presenta como todo un filósofo, a pesar de que fue profesor de matemáticas durante toda su vida en la Universidad de Jena. Utilizando el método que en su tiempo favorecía Aristóteles, y luego los escolásticos, el libro comienza esbozando y criticando severamente las opiniones de pasados pensadores sobre la materia en cuestión. Frege nos demuestra agudamente que los pasados tratamientos del tema han sido insuficientes.

En *GlA*, la preocupación central es la naturaleza de los objetos originales (*ursprünglich*) o primarios de la aritmética, es decir, los números. Frege piensa que para obtener el mayor rigor posible en las investigaciones matemáticas, hay que tener claro lo que son sus elementos más primigenios. Recordándonos a Euclides como un modelo de rigor, nos dice que hay que definir las nociones más básicas sobre las que se edifica el resto de la ciencia, tal como el geómetra de Alejandría hiciese en su monumental libro *Los elementos*..[9] Hay pues, que definir los números si es que se quiere ser riguroso con la aritmética a la manera que se hace con la geometría. En el

---

[9] *GlA* §1.

presente trabajo, nos dedicaremos a examinar qué suerte de definiciones utiliza Frege para ellos.

Primeramente, el tipo de definición que dará está, en *GlA*, estrechamente ligado a la concepción general de la matemática que Frege pretende defender. El subtítulo de la obra nos dice que ella consiste en una "investigación lógico-matematica sobre el concepto de número." Según él, parece que la aritmética es una rama de la lógica. La aritmética debe ser pues, reducible en términos puramente lógicos. Y esto debe valer, no meramente para los procedimientos de inferencia, sino también para las definiciones de las nociones básicas. Es decir, hay que definir las "palabras numéricas" en términos puramente lógicos. Sólo de esta manera, se comenzaría a demostrar que la aritmética no es más que lógica más desarrollada (*eine weiter ausgebildete Logik).*[10]

Pero antes de hacer una formalización completa con su nueva simbología expuesta en *Begriffsschrift*, Frege decide escribir este libro en lenguaje ordinario para, por un lado, ganar más público para su proyecto logicista, y por otro, exponer sus críticas a concepciones anteriores de la matemática. Entre éstas, hay que destacar la de Kant, quien había dicho que tanto en la geometría como en la aritmética intervenía la intuición sensible, y que por lo tanto éstas eran ciencias cuyos juicios eran sintéticos. Frege, que era un tenaz opositor a toda presunta influencia de la psicología en la lógica, tendencia que de hecho estaba en boga en las investigaciones matemáticas de su época, se opuso, en el caso de la aritmética, a una concepción kantiana de esta última. La aritmética, decía, debe ser una extensión de la lógica, y en esta última no caben consideraciones fisiológicas ni psicológicas. Para refutar la sinteticidad de las proposiciones aritméticas, no habría más que definir los

[10]Ibid. §87, p. 99.

números en términos lógicos, fuera del alcance de la intuición, y luego derivar los teoremas de la misma mediante leyes lógicas de inferencia. Esto es lo que Frege pretenderá demostrar, mediante dichas definiciones, si bien de una manera aun no formalizada pero si rigurosa en *GlA*.

Una estrategia general de las definiciones es ofrecida por Frege en la §18. Contrario a la axiomatización de la aritmética que luego desarrolló el matemático italiano Giuseppe Peano—apoyándose en Dedekind— a partir de 1889, en donde se dejan tres "ideas primitivas" sin definir (cero, número y sucesor), Frege sostiene que las definiciones no están completas si no se define al uno y al sucesor de un número, aún cuando a partir de las de estas dos nociones se pueden definir adecuadamente todos los demás números enteros. Frege muestra en la §6 que a partir de la definición de uno y sucesor se pueden definir los demás "números individuales", pero no se pueden demostrar los teoremas más elementales de la aritmética como "2+2=4", para lo cual hay que utilizar leyes generales como la de asociatividad. Pero tales leyes, por su generalidad, no se pueden derivar de las definiciones del uno, de sucesor, o de los números individuales, por lo tanto tienen que ser obtenidas a partir de una dilucidación del concepto general de número.[11] Por ende, tanto este último como "uno" y "sucesor" tienen que ser definidos en términos lógicos para obtener una "completud"[12] (*Ergänzung*) en las definiciones de los números individuales.[13]

Finalmente, faltaría señalar cuáles son las nociones de la lógica pura en virtud de las cuales Frege pretenderá definir los números. Las dos principales en el trabajo de Frege son anunciadas ya en la introducción de la obra, donde se señala como el tercer principio metodológico: "se debe tener en cuenta la

---

[11]*GlA* §18, p. 25.

[12]En este pasaje, Frege parece usar el término *Ergänzung* como sinónimo de *Vollständigkeit*.

[13]Ibid. p.25.

diferencia entre concepto y objeto".[14] La distinción entre concepto y objeto es pues imprescindible en la filosofía de la matemática de Frege, pues es en términos de dichas nociones—que él considera lógicas y no psicológicas—que serán las definiciones que ofrecerá para los números. Además, Frege distingue primero entre el "concepto general de número" y los "números individuales", que, en terminología fregeana, son los objetos que caen bajo dicho concepto, antes de ofrecer cualquier definición. A la misma vez, Frege utilizará para los mismos propósitos la noción de relación y, un caso especial de ésta, la relación de correspondencia biunívoca. En escritos posteriores, Frege dirá que tanto los conceptos como las relaciones son casos especiales de una noción lógica más general, a saber, la de función. En *GlA* nos dice, "Der Beziehungsbegriff gehört also wie der einfache der reinen Logik an."[15] Tenemos pues que ver el empleo constante de los términos "relación", "concepto", y "objeto" en *GlA* como parte integral del proyecto logicista de la aritmética que defendía Frege.

§2 Los juicios analíticos según Frege: sentido distinto al de Kant

Como hemos dicho, en *GlA*, especialmente en las §§ 5 a 44, Frege critica las opiniones de anteriores filósofos acerca de la naturaleza de los números y los enunciados matemáticos. En especial tratará de refutar la posición de Kant, según la cual tanto la geometría como la aritmética comprenden juicios sintéticos a priori. Pero no se ajustará exactamente, si esto fuera posible, al sentido usual de la terminología kantiana, sino que propondrá uno de su propia creación, si bien nos dice en una nota que no ha desvirtuado el sentido de dicha terminología, sino que lo ha aclarado.[16] Según Frege, la definición

[14]Ibid. X.
[15]Ibid. §70, p. 83.
[16]Ibid. §3, p. 3.

kantiana de un juicio analítico sólo cubre los casos en donde el sujeto es un término general, es decir, aplica sólo a los juicios universales afirmativos, y por lo tanto es incompleta. En la aritmética, por ejemplo, cubre casos como "los múltiplos de cuatro son múltiplos también de dos". En tal caso se podría decir quizás que el concepto del predicado "múltiplo de dos" está contenido en el concepto del sujeto "múltiplo de cuatro". Cuando, sin embargo, el sujeto lo es un nombre propio, que Frege toma como un nombre para un determinado objeto singular, no se puede hablar de un predicado que esté contenido en dicho sujeto,[17] por ejemplo, en "cuatro es el cuadrado de dos", donde "cuatro" para Frege es el nombre de un determinado objeto de la aritmética. Por otro lado, en el mismo pasaje, nos dice que tampoco vale la definición kantiana para los juicios existenciales, pero si tomamos en cuenta la afirmación de Frege en la §54 de que la existencia es una propiedad de conceptos, la cual es secundada por la doctrina de Frege según la cual los cuantificadores son predicados de segundo orden, parecería que tendría que decir que los juicios existenciales son sobre conceptos, por lo cual cabría hablar de un concepto de sujeto y tendría vigor en ese caso la definición kantiana. Pero Frege no abunda ni ofrece ejemplos.

Frege distinguía entre la parte asertiva de un juicio y el "contenido" del mismo juicio.[18] A tal contenido también lo llamó el "contenido de un juicio posible" o "contenido enjuiciable" (*beurteilbarer Inhalt*).[19] Mediante su conceptografía bidimensional representaba la aserción de un juicio con un trazo vertical, y el contenido del mismo juicio con un trazo horizontal. Al primero lo llamó el trazo del juicio, y al segundo el trazo del contenido. Hecha esta distinción, no hacía falta, según el, la tradicional dicotomía entre

---

[17]Ibid. §88, p. 100.
[18]*BS* §2.
[19]*Posthumous Writings*, p.11.

sujeto y predicado. En todo caso, el predicado consistiría siempre en la mera aserción, que puede ser expresada por la frase "es un hecho que", pero es generalmente omitida en el discurso ordinario. Por lo tanto, sólo dos aspectos de un juicio podrán ser considerados a la hora de distinguir los juicios analíticos de los juicios sintéticos, la aserción y el contenido.

Según Frege, la analiticidad o sinteticidad de un juicio no se aplican propiamente al contenido del mismo, sino a la justificación que podamos dar para la aserción del mismo.[20] Como Frege dirá más tarde en detalle[21], los contenidos de los juicios matemáticos que le conciernen son pensamientos eternos. Ellos son verdaderos o falsos independientemente de que así se les considere. Nos dice Frege en su introducción:

> [...] ni un enunciado (*Satz*) deja de ser verdadero,
> cuando dejo de pensar en él, ni el sol se desintegra,
> cuando cierro los ojos.[22]

Por ello, la justificación en cuestión que interesa a Frege no es una de índole psicológica, ni fisiológica, ni circunstancial en algún modo, sino que es una de índole formal y deductiva. Se entiende aquí por justificación una demostración a partir de "verdades primitivas",[23] tal como Euclides demostrara, e.g., la equivalencia entre las medidas de dos ángulos rectos y los ángulos internos de un triángulo, para todos los ángulos rectos y triángulos, a partir de definiciones, axiomas y postulados.

De manera que Frege define la analiticidad, la sinteticidad, la a-prioricidad, y la a-posterioricidad de un juicio según la justificabilidad formal del mismo. Pero para no caer en lenguaje que se asemeje a sus

[20] *GIA* §3, p. 3.
[21] Ver Frege: "El pensamiento".
[22] *GIA*, VI.
[23] Ibid. §3.

contemporáneos psicologistas, prefiere no usar la palabra juicio en sus definiciones. Prefiere hablar de "verdades" o "proposiciones"[24] analíticas o sintéticas, las cuales podrían parecer ser palabras sinónimas de "contenidos". Más adelante en la obra, sin embargo, Frege habla de juicios analíticos que son "contenidos" por ciertas proposiciones.[25] Pero esta manera de expresarse contrasta con lo que el propio Frege dice explícitamente en la §3, esto es, que las distinciones kantianas no se aplican al contenido de un juicio. Por otro lado, al comienzo de su quinto capítulo, que sirve de conclusión, se expresa libremente al tomar a las leyes de la aritmética como probables juicios analíticos.[26] Luego habla de las proposiciones mismas como analíticas,[27] y finalmente otra vez de las verdades de la aritmética como analíticas.[28] Es claro que Frege no fue consistente en su uso de la terminología kantiana, y quizás por ello no se destaca el uso de la misma en obras posteriores.

Pero en *GlA*, como se verá a partir de las definiciones que siguen, tenemos que entender que al hablar de una "verdad analítica", se refiere a una verdad cuya justificación es analítica, y al hablar de una "proposición sintética", quiere referirse a una proposición cuya justificación es sintética, y de igual forma con una "verdad a posteriori" y una "verdad a priori". Nos habla pues de las justificaciones y no de los contenidos.

Define una verdad como analítica, si su justificación consiste solamente de leyes generales de la lógica y definiciones; como sintética, si su justificación además incluye "verdades" de alguna ciencia particular, es decir, proposiciones que no son de una "naturaleza lógica general"; como a posteriori, si incluye referencia a hechos "no demostrables", o contingentes,

[24]Habla, al parecer, indistintamente de *Wahrheit* y *Satz*.
[25]*GlA* §91, p. 104.
[26]Ibid. §87, p. 99.
[27]Ibid. §§90, 103.
[28]Ibid. §109, p.119.

que tratan de "objetos determinados"; y como a priori, si por el contrario, su justificación sólo contiene referencia a leyes generales que a su vez "no requieren ni admiten justificación". En lo que nos concierne en este trabajo, se ve la importancia de la definición de una verdad analítica que hemos expuesto. Al menos en *GlA*,[29] el decir que la aritmética es una rama o extensión de la lógica, equivaldrá a decir que las proposiciones tanto de la lógica como de la aritmética son analíticas, si es que ellas se justifican sólo mediante leyes lógicas y definiciones.

§3 Rechazo a las definiciones según el origen psicológico o fisiológico

Nos dice Frege en su introducción, como su primer principio metodológico, que hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, y lo subjetivo de lo objetivo."[30] Sus definiciones, a pesar de ser extrañas (*unnatürlich*), serán "impecables en sentido lógico" (*logisch einwurfsfrei*).[31] De manera que de entrada se excluye toda definición psicológica o fisiológica, o meramente "natural". Las definiciones deben ser justificadas, y esta justificación debe tener un carácter lógico. Frege fue un opositor de la corriente psicologista en la matemática y en la lógica. Como hemos dicho, el proyecto de Frege consistía, a grandes rasgos, en estrechar los lazos entre la matemática y la lógica para así depurar los fundamentos de la primera de toda influencia psicológica. Por esta razón, Frege rechazará siempre todo factor subjetivo en sus investigaciones, y en particular, se mantendrá, en lo posible, alejado de cuestiones explícitamente epistemológicas hasta entrada su época madura.[32] Tanto los conceptos como los objetos, distinguidos tajantemente

---

[29]Como ha sido señalado, Frege no hace uso significativo de las distinciones kantianas para los juicios en obras posteriores.
[30]Ibid. X.
[31]Ibid. XI.
[32]Frege, *Posthumous Writings* , pp. 267-274.

por Frege según su tercer principio metodológico, son considerados como entidades objetivas[33], en el sentido de que son independientes del sujeto que los trate. Frege en varias ocasiones nos deja saber que para él, algo objetivo es algo que es igual para todos.[34] Por tanto, las definiciones de relaciones, conceptos, y objetos tendrán un carácter objetivo y determinado, y no serán meras descripciones de la manera como se llega a estar consciente de una relación, concepto, u objeto dado.[35] Luego de estipuladas, Frege considera que las definiciones pueden ser tomadas como juicios,[36] sobre los cuales nos dice:

> [...] la pregunta de cómo llegamos al contenido de un juicio tiene que ser en general distinguida de la de: de dónde obtenemos la justificación para nuestra aserción.[37]

Ninguna descripción de procesos naturales que preceden la formación de un juicio sobre número puede tomarse como una definición genuina del concepto, puesto que ni pueden servir a las demostraciones, ni nos informan sobre las propiedades de los números. En particular, Frege rechaza de plano, según dichas consideraciones, una definición para el sucesor no inmediato de un número en una serie-ϕ que ofrece como ejemplo en la §80, y que considera inaceptable, a saber:

> [...] cuando uno, partiendo de x, gira su atención siempre de un objeto a otro, con el cual esté aquél en la relación ϕ, y cuando uno de esta manera

[33]Frege llama objetivos a los conceptos en la §47.
[34]E.g., en §26, p. 35; §27, nota en p. 37; §61, p. 72; §80, p. 93; y §93, p. 105.
[35]Ibid. VIII.
[36]Ibid. §67, p. 78.
[37]Ibid. §3, p. 3.

> finalmente puede alcanzar a y, entonces se dice que y sigue a x en la serie-ϕ.[38]

Es un hecho el que un número se encuentre posterior a otro en la serie de los números naturales, que es la serie que le interesa en este caso a Frege, tal como es un hecho el que una hoja refleje unas particulares ondas de luz independientemente de que lleguen o no éstas a mis ojos, y el que un grano de sal sea soluble en agua, independientemente de que uno conduzca o no personalmente un experimento.[39] Según Frege, nuestras dificultades cognoscitivas son irrelevantes a la verdad de los hechos.[40] Por lo tanto, tal descripción subjetiva de cómo se puede llegar de x hasta y, no es propiamente la definición de 'y sigue a x en la serie-ϕ', expresión que en la terminología posterior de Frege designa una relación entre dos objetos. Dicha definición debe proveer un "criterio" que permita decidir "objetivamente" si y sigue o no a x en dicha serie.[41] Frege la expresa como sigue:

> [...] "si todo objeto que se encuentre en la relación ϕ con x cae bajo el concepto F, y si, para todo d, a partir de que d caiga bajo el concepto F se sigue que todo objeto que se encuentra en la relación ϕ con d cae bajo el concepto F, entonces se sigue que y cae bajo el concepto F, para cualquier concepto F"
>
> sea sinónimo de:
>
> "y sigue a x en la serie-ϕ" y de "x precede a y en la serie-ϕ".[42]

---

[38]Ibid. §80, p. 92.
[39]Ibid. §80, p. 93.
[40]Ibid.
[41]Ibid.
[42]Ibid. §79, p. 92.

Aquí queda claro, que Frege considera objetivas las nociones lógicas de objeto, concepto y relación, pues es en términos de ellas que su definición pretende ofrecer un criterio objetivo y no psicológico para el orden en una serie. Debe destacarse también que, como parte de su proyecto logicista, dicha definición se ofrece sin hacer uso de nociones específicamente matemáticas, considerando las relaciones de 'menor que' y 'mayor que' de la aritmética de los números naturales como casos específicos de relaciones entre objetos de un conjunto bien ordenado.

§4 El principio del contexto: polémica entre los estudiosos.

El segundo principio metodológico de Frege, el llamado principio del contexto, ha dado lugar a mucha discusión entre los estudiosos en cuanto a su rol en la filosofía de Frege. Esto, porque se ofrece primero en la introducción de *GlA*, se alude al mismo en la §46, se usa explícitamente en las §§60 y 62, se vuelve a mencionar en la conclusión en la §106, y no se vuelve a mencionar en la obra posterior de Frege. Sin embargo, los otros dos principios metodológicos expuestos en dicha introducción, a saber, la separación entre lo psicológico y lo lógico, y la distinción entre concepto y objeto, serán temas tratados por Frege en detalle luego de *GlA*. La cuestión del principio del contexto se ha reducido generalmente, pues, a dos preguntas: qué uso se le da en *GlA*, y si la omisión posterior a *GlA* implica un rechazo o abandono del mismo. Dichos cuestionamientos se complican al notar que Frege en *GlA* no distinguía todavía entre el sentido y la denotación (o referencia) de una palabra, y por lo tanto no sabemos si dicho principio concierne al sentido o a la denotación de la misma. Michael D. Resnik, en su artículo "The Context Principle in Frege's Philosophy", ha señalado que hay pasajes en *GlA* en donde puede valer la interpretación que involucra al sentido, otros a la denotación, e inclusive algunos en donde tanto el sentido como la denotación de una palabra puede ser limitado, por así decir, por la falta de un contexto adecuado.[43]

Pero en el presente trabajo, más específicamente nos interesará la relación que pueda tener el mismo con la concepción fregeana de las definiciones. El principio lee como sigue: "el significado de las palabras debe ser preguntado a partir del contexto de una oración y no en aislamiento."[44] Y en su versión más fuerte lee: "Sólo en el contexto de una oración tienen las palabras algún significado."[45] El propósito explícito del mismo lo es evitar que se tome una idea o imagen subjetiva (*Vorstellung*) como el significado de una palabra en determinados casos.[46] En particular, a Frege le interesa que se desasocie toda subjetividad del significado de los términos numéricos "0", "1", "2", etc. Nos dice Frege:

> [...] mediante esta observación, yo creo, puede ser evitada la concepción física del número, sin caer en una de índole psicológica.[47]

Como hemos señalado en la § anterior, Frege rechazaba toda definición en términos de origen psicológico o fisiológico. Entonces, parecen estar relacionadas las siguientes dos exigencias: el que no se permitan imágenes subjetivas como significados de las palabras,[48] y el que no se admitan definiciones de carácter subjetivo. Debemos ver, pues, hasta qué punto Frege, para este propósito, exige de sus definiciones que sea tomado en cuenta el contexto del término que se ha de definir.

---

43 Resnik (1967), p. 357.
44 *GlA*, X.
45 Ibid. §§60, 62.
46 Ibid. X, §60.
47 Ibid. §106, p. 116.
48 Ibid. X; §60, p. 71; §106, p. 116.

Los comentaristas de Frege llaman definiciones contextuales a las definiciones de este tipo. En ellas, para usar la terminología convencional, el *definiendum*, es decir la expresión que hay que definir, se encontrará en un contexto determinado, y el *definiens*, es decir la expresión que se usa para definir, dará significado al *definiendum* conjuntamente con el contexto de este último. Pero hay que señalar que Frege no usa en *GlA* el término de definición contextual ni su contraparte, el de definición explícita. Sin embargo, puesto que una parte significativa de la literatura secundaria acerca de la filosofía de Frege examina en tales términos los intentos de Frege para definir los números, dedicaremos una sección a las definiciones contextuales en *GlA*.

§5 Criterios gramaticales para las definiciones

Frege comienza su introducción diciendo que la proposición "El número uno es una cosa" no es una definición, y la razón que ofrece para ello, es precisamente una que podríamos llamar de carácter gramatical. Una tal oración declarativa que contenga el artículo definido a un lado, y al otro el artículo indefinido, no es considerada una definición.[49] Este criterio para las definiciones parece ser muy fuerte, y como veremos está estrechamente ligado a la distinción tajante entre concepto y objeto.

Según Frege, la expresión "el número uno" es considerada un nombre propio, puesto que mediante el artículo definido se indica que ella se refiere a un determinado y único objeto del conocimiento: sólo hay un número uno, y éste es siempre el mismo.[50] El nos dice que el artículo definido o determinado señala algo como único, y otro uso del mismo sería incorrecto. A la misma

---

[49]Ibid. *I*, ver tamb. §98, p. 109.
[50]Ibid. §38, p. 49.

vez, los artículos sirven para distinguir los nombres propios, que designan objetos, de los nombres de conceptos o palabras conceptuales (*Begriffswörter*) que por su parte designan conceptos. La presencia de un artículo definido— por ej. en "el profesor de lógica", "la mitad de cuatro", "el número siete"—o un pronombre demostrativo indica que el nombre o la frase designa un objeto único, una "cosa". Pero cuando una palabra o frase es utilizada ya sea con el artículo indefinido —como en "un planeta", "un filósofo", "un corredor de pista y campo", etc.— o en plural —como en "los planetas", "los filósofos", etc.—, la tenemos que considerar como un nombre de concepto. De esta manera podemos distinguir cuando una palabra ambigua como "luna" es usada como nombre propio de un objeto ('La luna está llena.') o como nombre de un concepto ('¿Cuántas lunas tiene Júpiter?').[51] En el caso de los números, nos referimos a ellos como objetos, puesto que decimos "el uno", "el dos", etc. y no "un uno", "un dos", etc. ni "los (números) unos", "los (números) dos", etc., a menos que nos estemos refiriendo al numeral y no a su significado. Esta última es la interpretación formalista, según la cual la aritmética trata de los símbolos mismos, posición que Frege ataca fuertemente en *GlA* y en escritos posteriores.

Sin embargo, como es de esperarse, no siempre los criterios gramaticales serán de ayuda, sino que en ocasiones pueden también servir de base para engañarnos. Gramaticalmente, se podría decir que "uno" se comporta como "sabio", puesto que se puede decir "Solón fue uno" tal como se dice "Solón fue sabio". Por ende, tanto "uno" como "sabio" serían propiedades de las cosas. Pero según Frege, en aislamiento "uno" no es un predicado en sí mismo como lo es "sabio", puesto que en tal caso "uno"

---

[51] Ibid. §51, p. 64.

adquiere su significado del contexto.[52] Ofrece a la misma vez una razón más convincente al considerar otro aspecto gramatical: el plural. Podemos decir tanto que "Solón es sabio" y que "Tales es sabio", como que "Solón es uno" y que "Tales es uno", pero mientras que podemos decir que "Solón y Tales son sabios", no podemos decir que "Solón y Tales son uno".[53] Un argumento similar encontramos en el *Hipias Mayor* de Platón para distinguir los números de propiedades de las cosas como "justo", "enfermo", "herido", "de oro", "de plata", etc., que como "sabio" se aplican, a diferencia de los números, de igual manera a un grupo de individuos, ya sea tomados "conjuntamente" o "separadamente".[54] De esta manera se pueden diferenciar gramaticalmente los números designados por los términos numéricos, que Frege pretende definir, de las propiedades de las cosas designadas por los adjetivos. "Cero", "uno", "dos", etc., son para Frege nombres propios que no admiten plural y que designan objetos determinados, tal como "Aristóteles".

Más tarde, Frege distinguirá entre el sentido y la denotación de los nombres propios y utilizará dicha distinción para señalar que varios "nombres propios" pueden tener la misma denotación pero distinto sentido, como en el caso de "Aristóteles" y "el maestro de Alejandro Magno",[55] y el de "5" y "2+3",[56] pues considerará también como nombres propios tanto la frase "el maestro de Alejandro Magno" como a"2+3". Pero, como él mismo admite, cuando escribió los *GlA* no había hecho aún tal distinción.[57]

Dado el que "uno" y "1" son nombres propios, se explica porqué siempre escribimos, e.g., "1" de la misma manera y sin marcas distintivas.[58]

---

[52] Ibid. §29, p. 40-41.
[53] Ibid.
[54] *Hipias Mayor* , 300c-302b.
[55] *KS*, p. 144.
[56] *NS*, p. 243.
[57] *KS*, p. 172.
[58] *GlA* §§38, 45.

Pues no distinguimos entre distintos unos de la misma manera que no distinguimos entre distintos filósofos nacidos en Estagira llamados Aristóteles. Frege utiliza este señalamiento acerca de la gramática de la aritmética para criticar la concepción de Jevons, según la cual "5" quiere decir "1+1+1+1+1", y cada "unidad" es distinta de las otras.[59] Pero si verdaderamente cada unidad se refiriese a algo distinto, entonces habría que distinguir los símbolos también: "1'+1''+1'''+1''''+1'''''".

Por otro lado, tampoco corresponde el significado del símbolo "+" con el de la conjunción "y", aún cuando digamos "2+2=4" y "dos y dos son cuatro".[60] Según Frege, si se usasen de la misma manera, entonces 2+2 no sería 4 sino 2, tal como "oro y oro y oro no es otra cosa que oro."[61] Diríamos, que el símbolo "+" no es propiamente una conjunción: $\alpha \wedge \alpha$ es tautológicamente equivalente a α, pero 2+2 no es igual a 2.

En resumen, menciona un criterio para las definiciones de objetos, a saber, a ambos lados de la definición debe aparecer una palabra o frase que designe un objeto, la cual puede ser de tal manera considerada si está acompañada de un artículo definido o un pronombre demostrativo, o si no admite plural. En cuanto a las definiciones de conceptos, Frege no ofrece un criterio correspondiente, pero podríamos decir que en ambos lados deberían aparecer palabras de conceptos, las cuales también pueden ser identificadas gramaticalmente como hemos dicho.

Pero, ¿Utiliza Frege tales criterios gramaticales en las definiciones que ofrece en *GlA* ? En un número significativo de las definiciones de *GlA,* Frege define el significado de una expresión en términos del significado de otra

[59] Ibid. §§36-38.
[60] Ibid. §§38, 45.
[61] Ibid. §38, p. 50.

expresión. Así, por ejemplo, dice en la §62 que para obtener un criterio para la identidad de los números:

> [...] debemos definir el sentido de la oración "el número que le corresponde al concepto F es el mismo que el que le corresponde al concepto G"; esto es, debemos representar el contenido de esta oración en otros términos, sin hacer uso de la expresión "el número que pertenece al concepto F."[62]

En este caso, tanto el *definiendum* como el *definiens* serán oraciones completas, y no nombres propios para objetos ni palabras conceptuales que designen conceptos. Por ende, los criterios que hemos mencionado no se aplicarán directamente. Podríamos llamar contextual a este tipo de definición, pues no pretende asignar el significado de las palabras fuera del contexto oracional en que se presentan, y ver su uso repetido en *GlA* como una aplicación del principio del contexto que Frege destaca tanto en la introducción de la obra como en la recapitulación de la misma que hace en el último capítulo. Como veremos, se destaca este tipo de definición en *GlA.*

Por otro lado, encontramos definiciones en donde sí se podría decir que se pueden evaluar según los criterios gramaticales que hemos mencionado. Especialmente en las definiciones para objetos, Frege es cuidadoso en cuanto a dichos criterios. Así, en la definición que ofrece en la §68 y recalca en la §72, nos dice:

---

[62]Ibid. §62, p. 73.

> Por consiguiente, yo defino: el número que le corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico al concepto F".[63]

Aquí, Frege sostiene que tanto los números como las extensiones son tomados correctamente como objetos dado el uso del artículo determinado en las expresiones "el número..." y "la extensión...". De hecho, dicha definición es defendida explícitamente mediante criterios gramaticales en una nota al calce, donde se dice que es mediante el uso del artículo determinado que se indica que los números individuales son objetos.[64] Pero debemos señalar, que en este caso, no se hace referencia propiamente a ningún número en particular, sino que se toman los números particulares como argumentos. Podríamos pues hacer más explícita la definición re-expresándola así: para todo objeto *x* y para todo concepto F, *x* es el número que le corresponde al concepto F, si y sólo si *x* es la extensión del concepto "equinumérico al concepto F". De tal manera, en la terminología que Frege expondrá posteriormente, *x* es una variable que puede ser sustituida por un nombre propio que designe un objeto, y por su parte F es una variable que puede ser sustituida por un nombre para concepto. Frege ofrece tres de tales sustituciones en las §§74, 77 y 84. Nos dice:

> [...] yo defino: 0 es el número que le pertenece al concepto "no idéntico a sí mismo".[65]

Donde, en nuestra interpretación, se sustituiría a *x* por el nombre propio "0" y a F por el nombre de concepto "no idéntico a sí mismo". Paralelamente, se hace otra sustitución de *x* y F cuando nos dice:

---

[63]Ibid. §68, p. 79-80.
[64]Ibid. Nota en p. 80.
[65]Ibid. §74, p. 87.

> [...] [definimos]: 1 es el número que corresponde al concepto "idéntico con el 0".[66]

Y más adelante define de la misma manera a ∞_1 como el número que le corresponde al concepto "número finito".[67] Para Frege, los números infinitos son también objetos, tal como lo son el cero, el uno, el dos, etc.

Por otro lado, la situación no parece ser tan clara en el caso de las definiciones de nombres de conceptos. Como hemos dicho, Frege no las evalúa gramaticalmente. Define el concepto de número así:

> la expresión "*n* es un número" será sinónima de la expresión "hay un concepto tal, que *n* es el número que le corresponde".[68]

En este caso, Frege pudo haber expresado la primera expresión en una forma más generalizada, tal como él señala,[69] diciendo, en vez de "*n* es un número", "*n* cae bajo el concepto de número". Pero, de cualquier modo, no parece que Frege se imponga un criterio gramatical que compare ambas expresiones a la hora de definir una en términos de la otra. En general, se sigue la práctica de establecer mediante definición, que dos expresiones son sinónimas sin exigir por el momento una estructura gramatical a las mismas.

§6 Criterios semánticos para las definiciones

Al comienzo de la introducción, Frege parece señalar que las preguntas "¿Qué es el número uno?" y "¿Qué significa el símbolo 1?" son equivalentes.[70] En efecto, luego dirá que las definiciones en su sentido lógico,

---

[66] Ibid. §77, p. 90.
[67] Ibid. §84, p. 96.
[68] Ibid. §72, p. 85.
[69] Ibid. §§70, 74.
[70] Ibid. I.

fijan el significado de un signo o una expresión,[71] y como hemos dicho, en la mayoría de las definiciones en *GlA* se establece explícitamente que dos expresiones distintas comparten un mismo significado. Ahora bien, dos señalamientos de Frege, a pocos años de la publicación de los *GlA* y antes de publicar su próximo libro, nos indican que Frege no pudo ser claro ni consistente en cuanto al carácter semántico de las definiciones que ofreció en *GlA*. Nos dice en una nota al calce de su artículo "Función y concepto" de 1891:

> Lo que se hace al definir es asociar un sentido o una denotación con un signo. Donde sentido y denotación faltan completamente no se puede hablar en rigor ni de signo ni de definición.[72]

Encontramos en esta nota la primera aclaración explícita de Frege acerca de lo que son las definiciones. Pero esto no nos ayuda en el análisis de las definiciones que encontramos en *GlA*, puesto que en su artículo "Sobre concepto y objeto" de 1892, nos dice:

> Cuando escribí mis *Grundlagen der Arithmetik* no había hecho todavía la distinción entre sentido y denotación y por esta razón junté bajo la expresión "contenido enjuiciable" (*beurtheilbarer Inhalt*) aquello que ahora distingo y designo con las palabras "pensamiento" y "valor veritativo". La explicación dada en *Grundlagen*, p. 77, no la apruebo hoy del todo en su formulación textual,

---

[71]Ibid. §§7, 67, 84.
[72]*KS*, p. 127.

> aunque en lo esencial mantengo la misma posición.[73]

De hecho, en *GlA*, usa los términos *Sinn* y *Bedeutung* —además de *Inhalt* —, que aquí traducimos por sentido y denotación respectivamente, sin aparente distinción significativa.[74] Si consideramos ambas citas que acabamos de ofrecer, Frege nos debe una explicación de todas las definiciones ofrecidas en *GlA* y no sólo de un pasaje en la página 77. Según la propia admisión de Frege, en cuanto a su carácter semántico, las definiciones ofrecidas en los *Grundlagen* de 1884 —que nos ocupan— son inadecuadas.

Pero Frege hace algunos señalamientos de interés sin hacer uso explícitamente sistemático de los términos *Sinn*, *Bedeutung*, e *Inhalt*. En cuanto a las definiciones, nos señala que es imprescindible conocer de antemano el sentido del *definiens*. Nos dice que no se puede definir el 3 como (2+1) si no se asocia con (2+1) un sentido. El *definiens* debe, pues, según este ejemplo, tener sentido para poder en efecto definir al *definiendum*. Según este mismo pasaje, tal sentido no puede ser una correspondencia con algún hecho particular observado, como pretendía John Stuart Mill. Frege critica a éste diciendo que bajo una tal interpretación de los números habría que excluir al cero, puesto que de ninguna manera podría darse una observación de una colección de cero objetos. Según Mill, los números son una suerte de abstracciones a partir de colecciones de objetos que han sido observadas. Por ende, para Mill el cero no tiene sentido. Pero, según Frege, si los cálculos que utilizan el cero tienen un significado, entonces el cero no puede dejar de tener

---

[73]*KS*, p. 172. Hay que aclarar que consideró, luego de *GlA*, a las oraciones declarativas, entre las que incluyó a las ecuaciones matemáticas, como nombres propios cuyo sentido es un pensamiento y cuya denotación es un valor veritativo, y dejó de utilizar el término "contenido" que en *GlA* y en *BS* incluía tanto al sentido como a la denotación.

[74]Usamos aquí la palabra "significado" para traducir tanto *Sinn* , *Bedeutung* , e *Inhalt* cuando no parezca ser de provecho destacar el uso por parte de Frege de dichos términos, dada la aclaración que hiciera de que no hizo un uso sistemático de los mismos en *GlA* .

un sentido. Por otro lado, por el mero hecho de no haber llevado a cabo una observación de una colección de un billón de objetos, no podemos negar que una tal cifra tenga sentido.

En torno a la definición que ya citamos de "el número que pertenece al concepto F" en términos de "la extensión del concepto 'equinumérico al concepto F' ", también dice que hay que conocer el sentido del *definiens*:

> Aquí suponemos que el sentido de la expresión "extensión de concepto" es conocida de antemano.[75]

De hecho, hay que decir que esto se presupone también para todas las definiciones que ofrece Frege mediante la estipulación de la sinonimia entre dos expresiones, una de las cuales hace de *definiens* y la otra hace de *definiendum*. Así, en la definición:

> Ahora voy a definir [...]. La oración: "hay un concepto F y un objeto *x* que cae bajo dicho concepto de manera que el número que le corresponde al concepto F es *n*, y que el número que le corresponde al concepto ""cae bajo F pero no es igual a *x*"" es *m*" será sinónima de [la oración] "*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales."[76]

se presupone la comprensión del significado de la primera oración (*definiens*) y éste mismo se le asigna a la segunda (*definiendum*). En general, tal como en la cita que acabamos de ofrecer, las definiciones de *GlA* estipulan que el significado de una oración o expresión que, en cuanto sea posible,

---

[75] Ibid. §107, p. 117.

[76] Ibid. §76, p. 89. Traducimos aquí *Satz* por "oración".

contiene solamente términos y nociones propias de la lógica —como objeto, concepto, extensión de concepto (que incluye a 'el número que corresponde a un concepto'), relación, identidad o igualdad (que es un tipo de relación), la caída de un objeto bajo un concepto, la realización de una relación de dos argumentos por parte de dos objetos, etc.— será también, por estipulación mediante definición, el significado de otra oración o expresión que designa una proposición o noción considerada propia de la aritmética como, e.g., "*n* sigue inmediatamente a *m* en la serie de los números naturales", "el concepto F es equinumérico al concepto G"[77]; y como "*n* es un número"[78] que citamos anteriormente. Lo cual constituye clara evidencia del proyecto logicista que Frege quería impulsar.

Por otro lado, en cuanto al significado de las proposiciones aritméticas, nos dice en repetidas ocasiones que éste no es lo mismo que la aplicación de las mismas.[79] De manera que el sentido del símbolo + no es, e.g., la relación entre las partes de un montón y el todo. '5+2=7' no significa que cuando mezclamos 2 unidades de un líquido con 5 unidades de otro obtenemos 7 unidades de líquido. Tal es una aplicación de '5+7=12', pero no su significado. La matemática pura no trata sobre nada físico, y por tanto las leyes generales de la misma no son leyes de la naturaleza propiamente. Dichas aplicaciones no constituyen "el sentido propio" de las proposiciones de la aritmética.[80] Pero esto no significa que Frege niegue que tengan un rico contenido.[81] El sentido de las proposiciones de la aritmética dependerá de la interpretación que se le dé a sus símbolos. De esta manera, dice, se podrán distinguir de las

---

[77]Ibid. §72, p. 85.
[78]Ibid. §72, p. 85.
[79]E.g.,*GIA* §9.
[80]*GIA* §16, p. 22.
[81]Ibid. §16, p. 22.

"formas vacías de la lógica",[82] aún cuando sostenía que ellas son reducibles a proposiciones de la lógica.

Frege hace énfasis en la distinción entre un símbolo matemático y su contenido. Nos dice que no se puede esperar "algo con sentido" a partir de operaciones con "símbolos vacíos."[83] En particular, nos parece contundente el señalamiento que Frege repetirá varias veces a lo largo de sus obras de que las propiedades atribuidas a los números no se les pueden atribuir también a los signos numéricos. Por ejemplo, la propiedad de permanecer sin cambio alguno al multiplicarse consigo mismo, se le debe atribuir al significado del símbolo "1", pero ciertamente no al símbolo mismo, cuyas propiedades espaciales y físicas no son por su parte atribuibles a dicho significado.[84] Los símbolos son un recurso mediante el cual se puede manejar un contenido que no es sensible, puesto que mediante su uso se hace dicho contenido "tangible".[85] Y acerca de los símbolos mismos, la aritmética no pretende decir nada,[86] puesto que la conexión entre un símbolo y lo simbolizado por él es enteramente arbitraria.[87] Schröder, por su parte, comete el error de definir el numeral en vez del número,[88] y Stricker asocia con la palabra "cien" meramente el símbolo 100.[89]

§7 Criterios ontológicos

Sin ánimo de menospreciar la tarea filosófica, cierto es que en general los filósofos se distinguen por hacer distinciones que otros no hacen, afinando

[82]Ibid.
[83]Ibid.
[84]Ibid., II. También, p.e., en *KS*, p. 127.
[85]Ibid.
[86]Ibid. §24, p. 32.
[87]Ibid. §§16, 24.
[88]Ibid. §43, p. 55.
[89]Ibid. VI.

la comprensión de su objeto de estudio pero sobrecargando sus ontologías con más entidades. Frege, cuya filosofía se distingue por un admirable rigor y uniformidad en el uso de la terminología, no por esto deja de contribuir a dicha sobrepoblación. Introduce las nociones de concepto (*Begriff*) y objeto (*Gegenstand*) como entidades objetivas que deben ser distinguidas tajantemente unas de las otras, según el tercer principio metodológico de *GlA*.[90] Debemos entender a partir del primer y tercer principio, que Frege asocia lo psicológico con lo subjetivo, y lo lógico con lo objetivo, y que por ende tanto los conceptos como los objetos pertenecen al ámbito de lo objetivo y se pueden distinguir claramente entre sí. Frege, al hacer uso de estas nociones en su introducción y a lo largo de *GlA*, presupone una comprensión de las mismas para el estudio riguroso de lo que es un número que realiza en su obra, y es precisamente en términos de ellas que se ofrecerán las definiciones de los números.

Debe ser aclarada la peculiar concepción fregeana del ámbito objetivo, la cual posteriormente será elaborada en diversos escritos. Frege dedica su largo parágrafo §26 de *GlA* para exponer qué es lo que entiende por objetivo. Ofrece varios ejemplos. Lo objetivo es independiente de nuestras representaciones (*Vorstellungen*). Podríamos designar arbitrariamente un cuerpo de agua distinto para llamarse Mar del Norte, pero esto de ninguna manera significa que tal nombre se use para referirse a un estado (*Zustand*) o proceso (*Vorgang*) interior de la mente mediante el cual hiciéramos tal cambio. Todo lo contrario, usamos tal nombre para designar algo que es independiente de consideraciones psicológicas. Nos referimos pues a algo objetivo (*etwas Objectives*). De hecho, si en efecto se hiciera tal cambio, no diríamos que lo que antes era verdadero respecto del mar del norte, e.g., que

[90]Ibid. X.

su mayor profundidad es 740 metros, pasa ahora a ser falso, puesto que tal verdad se predica no de la frase 'mar del norte' propiamente, sino de lo que dicha frase en un momento dado significa. Diríamos según Frege, que se estaría reemplazando un contenido (*Inhalt*) verdadero en la oración 'La mayor profundidad del mar del norte es 740 metros' por un contenido falso, sin que se altere la verdad del contenido original. Dicho contenido es por ende objetivo, no depende de nuestra manera de designar.

Lo objetivo es factual (*etwas Thatsächliches*). Tanto el número como el color son objetivos en este sentido. No dependen de nuestra arbitrariedad (*Willkühr*). Pero el color se conoce a través de los sentidos, mientras que no ocurre necesariamente así con el número, puesto que hasta las cosas inmateriales son enumerables. Por lo tanto, hay que distinguir lo objetivo de lo sensible.

Frege trata de resumir su concepción de lo objetivo en el siguiente párrafo:

> Yo distingo lo objetivo de lo tangible (*Handgreiflich*), lo espacial, y lo actual (*Wirklich*). El eje de la tierra y el centro de masa del sistema solar son objetivos, pero no quisiera llamarlos actuales como a la tierra misma. Se le llama frecuentemente al ecuador una línea pensada (*gedachte*), pero sería falso llamarlo una línea imaginada (*erdachte*), pues el ecuador no se origina (*entstanden*) por medio del pensamiento, producto de un proceso del alma, sino que es reconocido (*erkennen*) y aprehendido (*ergreiffen*). Si el ser reconocido fuese un origen, entonces no podríamos

> expresar nada positivo en el caso de un tiempo anterior a su ostensivo (*vorgeblichen*) surgimiento.[91]

Claramente, el eje de la tierra y más aún el centro de masa del sistema solar están lejos de ser entidades sensibles, sin embargo tampoco son creaciones de la mente como la tradicional dicotomía de la epistemología nos haría creer. Son reconocidas pero no creadas por la mente, puesto que no pertenecen a ninguna intuición particular, y son una y la misma para todas las mentes. De la misma manera es deseable que los números sean los mismos para todos para evitar que la aritmética se convierta en un caos, tal como Frege nos dice en varios pasajes.[92] Según Frege, los axiomas de la geometría son los mismos para todos y en este sentido son objetivos. Frege nos ofrece un ejemplo tomado de la geometría proyectiva en donde, aun cuando dos personas pueden asociar diferentes intuiciones con una palabra como "punto", no obstante reconocerían los mismos axiomas geométricos, por lo tanto podemos entender que asocian algo objetivo también con dicha palabra.

La palabra "blanco" también tiene un sentido objetivo (*objectiver Sinn*), a pesar de que la sensación que nos recuerda puede ser enteramente subjetiva. Decimos que la nieve es blanca, aun cuando esto depende de si podemos ver, de si ella está expuesta a la luz, de si dicha luz no es roja o amarilla, etc. No nos referimos pues a las sensaciones que podamos tener de la nieve, sino a una cierta cualidad objetiva (*objective Beschaffenheit*) que tal sustancia posee

> independientemente de nuestras sensaciones, intuiciones, y representaciones; y de construcciones

[91]Ibid. §26, p. 35.
[92]E.g., en *GlA* §38, p. 49.

> de imágenes interiores a partir de sensaciones anteriores recordadas, pero no independientes de la razón...[93]

Lo objetivo es pues independiente de todo lo que sea particular al que percibe. Inclusive el color blanco tendría un tal sentido objetivo para una persona ciega que no pueda por esto tener una sensación visual del mismo, puesto que lo distingue de otros colores, ya sea porque otros hacen la distinción o porque ha hecho algún experimento.[94] En este caso, diríamos, que la misma propiedad objetiva que hace que una cosa refleje la luz de una determinada manera, puede ser identificada por otros medios que no tengan que ver directamente con la sensación de tal reflexión.

Como ya hemos dicho, lo objetivo es igual para todos. Por otro lado, las ideas o representaciones (*Vorstellungen)* son privadas. Por lo tanto, los números no son representaciones o ideas, puesto que en tal caso sería distinto cada número para cada persona, haciendo inútil cualquier fundamento que no sea uno psicológico para la aritmética. El número dos es uno y el mismo para todos, y es deseable que así sea, puesto que de otra manera no podríamos calcular con certeza el resultado de 2+2 sin especificar a qué persona pertenece la particular representación del dos a la que nos referimos.[95]

En una extensa nota al calce[96] nos dice Frege que se podría adoptar una terminología que distinga entre representaciones subjetivas y representaciones objetivas. Pero como será su práctica en obras posteriores, prefiere utilizar la palabra representación o idea (*Vorstellung*) solamente en su sentido subjetivo. Y en lo que nos concierne en esta sección, nos dice que

[93]Ibid. §26, p.36.
[94]Ibid.
[95]Ibid. §27, p.37.
[96]Ibid.

dichas "representaciones objetivas" podrían dividirse en objetos y conceptos. Son pues objetivos en el sentido peculiar de Frege, tanto los objetos como los conceptos. Cuando Frege habla de un concepto, no se refiere a algo subjetivo como quizás se podría esperar. Tanto los conceptos como las relaciones entre ellos, como la de subordinación, son objetivos.[97] Los conceptos, si bien pueden ser obtenidos también mediante abstracciones a partir de lo sensiblemente dado, no son únicamente obtenidos de tal manera.[98] Por otro lado, cuando habla de un objeto, no se refiere necesariamente a algo sensible, puesto que, como hemos dicho, lo objetivo no se reduce a lo sensible. No todos los objetos son espaciales, ni todos ocupan un lugar. Nos dice:

> Una determinación del lugar del número 4 no tiene sentido; pero a partir de esto se sigue solamente que dicho número no es un objeto espacial, y no que no es un objeto de ninguna manera. No todo objeto está en algún lugar.[99]

De igual manera, tanto los conceptos como los objetos que interesan a Frege en la presente obra, además de ni ser subjetivos ni ser sensibles, son iguales para todos e independientes de toda sensación, intuición, o cualquier construcción mental particular. Por ende, son independientes de nuestra arbitrariedad. No son ni tangibles, ni espaciales, ni actuales. Son reconocidos o descubiertos por la mente pero no son creados por ella.

Una vez presentados los conceptos y los objetos como objetivos, resta mostrar cómo se puede distinguir entre ambos tal como exige el tercer principio metodológico de *GlA*, según el cual hay que tener siempre presente la distinción entre concepto y objeto. Si ambos son objetivos en la manera

---

97Ibid. §47, p. 60.
98Ibid. §49, p.62.
99Ibid. §61, p. 72.

arriba descrita, no se puede recurrir ni a la subjetividad, ni a la sensibilidad para hacer dicha distinción. Debe haber una diferencia esencial. Precisamente este tema será objeto posterior de la atención exclusiva de Frege en una conocida serie de artículos escritos luego de *GlA* pero antes de su próximo libro, *Grundgesetze der Arithmetik* (I:1893; II:1903), en lo sucesivo *GgA*. No encontramos que elabore en *GlA*, sin embargo, criterios esenciales para distinguirlos como el de saturación[100] — que posteriormente elaborará —, pero sí se menciona el de la necesidad de completud de los conceptos y las relaciones.[101] No obstante, Frege contrasta y describe ambas entidades de diversas maneras.

En la terminología que Frege utilizará a lo largo de toda su obra, varios objetos se relacionan con un concepto diciendo si ellos *caen* o no *bajo* dicho concepto. Los objetos son descritos como singulares o individuales (*einzeln)* a diferencia del concepto bajo el cual caen.[102] Ellos no ocurren más de una vez, sino que varios ocurren bajo un mismo concepto. Pero Frege distingue el concepto del objeto aun en el caso de que sólo un objeto caiga bajo un determinado concepto, e.g., 'satélite natural de la tierra'.[103] En tal caso, tanto el objeto como el concepto son individuales, y ocurren sólo una vez. El criterio de singularidad, si se entiende que un concepto bajo el cual cae más de un objeto no debe ser descrito como singular, no basta pues para distinguir a un concepto de un objeto.

Frege describe a los objetos como determinados (*bestimmt)* y con propiedades innatas (*angebbaren)* como en el caso del número uno el permanecer sin cambio cuando se le multiplica por sí mismo.[104] Pero más

[100]Que menciona, sin embargo, en una carta de 1882.
[101]*GlA*, §70, p. 82.
[102]Ibid. §37, p. 48.
[103]Ibid. §51, p. 63.
[104]Ibid. II.

adelante describe tanto a los objetos como a los conceptos como determinados y fijos (*festig*).[105] Tomando nuevamente a los números como objetos, nos dice que por su naturaleza se encuentran en un orden determinado, y que cada uno está constituido de una propia manera (*eigene Weise*) y tiene su naturaleza propia (*Eigenart*).[106] En el mismo pasaje nos dice que en el caso de los números no estamos en posesión del concepto general bajo el cual caen todos. Los números son justamente (*geradezu*) creados (*geschaffen*) y determinados por el proceso de la adición del uno.[107] Por esta razón, dice Frege, sus propiedades se siguen de sus definiciones.[108] Los números como objetos también se distinguen de los puntos de la geometría. Un punto considerado en sí mismo no puede ser distinguido de ningún otro, no es particular ni especial (*besonder*). Por otro lado, cada número es distinguible de todos los demás. Cada uno tiene su particularidad (*Eigenthümlichkeit*) y su peculiaridad (*Besonderheit*)[109]. Cada número como el cero, el uno, etc., tiene algo especial o peculiar (*etwas Besonderes*)[110].

Para distinguir los objetos de los conceptos, un pasaje revelador en *GlA* se encuentra en la §47.[111] Frege pregunta si la proposición "Todas las ballenas son mamíferos" habla de conceptos o de animales (objetos). No podemos señalar ningún animal que sea el sujeto de dicha predicación. En términos más generales, no es un enunciado que predique alguna propiedad de un objeto determinado. La palabra "ballena" en dicha oración, dice Frege, no designa un ser individual (*Einzelwesen*). Y entonces, ¿De qué tipo de entidad se está predicando? De un concepto, del concepto de ballena, el cual es tan

[105]Ibid. V.
[106]Ibid. §10, p. 15.
[107]Ibid. §10, p. 16.
[108]Ibid.
[109]Ibid. §13, p. 20.
[110]Ibid. §44, p. 57.
[111]Ibid. §47, p. 60.

objetivo como lo son los objetos que puedan caer bajo el mismo. Una aseveración sobre un concepto, dice Frege, contiene algo factual (*etwas Thatsächliches*). Pero Frege va más allá en otro pasaje. Nos dice que cuando hablamos del concepto de triángulo rectángulo, no estamos predicando la propiedad de ser rectángulo precisamente del concepto de triángulo, pues sería tan absurdo hablar de un concepto rectángulo, como hablar de un "concepto azul", o un "juicio salado". Como Frege elaborará en ensayos posteriores, más bien queremos decir que la propiedad de ser rectángulo le pertenece a cada uno de los objetos que puedan caer bajo el concepto de triángulo. De hecho, se podría añadir que ni siquiera tiene tres ángulos el concepto triángulo, sino que esta propiedad le pertenece a cada objeto que caiga bajo dicho concepto. A estas presuntas propiedades de conceptos llama Frege marcas o notas características (*Merkmale*) del mismo. En el caso anterior, tendríamos que decir que la propiedad de ser mamífero se predica de "todos" los objetos que caigan bajo el concepto de ballena, pues igualmente absurdo resultaría intentar concebir un concepto mamífero.

Otro contraste señalado por Frege para distinguir en *GlA* entre concepto y objeto lo es su tesis de que los números son predicados de conceptos y no de objetos. O como lo expresa Frege, "Una expresión de número contiene una aserción sobre un concepto" (*Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriff)*.[112] Luego de haber señalado que los números no se predican ni de objetos externos, ni de colecciones o conjuntos de objetos (*Menge*), ni de representaciones subjetivas, Frege sostiene que se predican de entidades objetivas que llama conceptos. Pero no es suficiente esta aclaración para distinguir entre concepto y objeto a menos que no se tenga previamente definido lo que es un número. Y Frege ofrece su definición de

---

[112]Ibid. §46, p.59. Ver también §48, p. 61-2.

número en un pasaje posterior al que sostiene lo que mencionamos. Decir pues, que los números se predican de conceptos y no de objetos no sirve pues, en ese lugar de la obra, para distinguir los conceptos de los objetos. Más aun, Frege presupone, como hemos dicho arriba, las nociones de concepto y objeto para entender con base en éstas la de número.

Si bien pues, no parecen enteramente satisfactorias las diferencias ofrecidas por Frege para distinguir entre concepto y objeto en *GlA* — lo cual probablemente lo movió a elaborarlas en varios trabajos posteriores —, quedó claro, sin embargo, que ambas nociones son objetivas en el sentido particular con que Frege entendió esta palabra. A dicho ámbito objetivo Frege adscribió un carácter de eternidad y permanencia. "El pensamiento", dice en su introducción — como tres décadas más tarde elaborará[113] —, "es esencialmente el mismo en todas partes."[114] Frege adscribe la verdad a "pensamientos", o como dijo en *BS*, a contenidos enjuiciables, cuya verdad no depende de ningún factor psicológico.[115] Como hemos dicho más arriba, el contenido de una aserción es verdadero o falso independientemente de nuestras representaciones o procesos internos. La verdad no es, según Frege, como diríamos en terminología más moderna, propiedad de las expresiones sino de las proposiciones que ellas expresan, suponiendo que esté implícito todo aquello que haga falta determinar para que una proposición tenga un valor veritativo determinado. Esta concepción de la verdad, según Hintikka, prejuiciará a Frege en contra de Hilbert y también del desarrollo de la teoría de modelos.[116] Por su parte, los conceptos también pueden ser en cierta manera eternos. Nos dice Frege, que el número que pertenece al concepto "habitante

[113]G. Frege, "El pensamiento" (1918).
[114]Ibid. III.
[115]Ibid. §§8, y otras.
[116]Hintikka & Sandu, "Uses and Misuses of Frege's Ideas", pp. 278-281.

de Alemania en Año Viejo 1883, hora de Berlín" es el mismo "para toda la eternidad".[117] Pero en el caso del concepto "habitante de Alemania", éste, nos dice, anticipando ciertamente la posterior definición suya de concepto como un tipo de función, es "una función del tiempo". "Hay algo fluido (*etwas Fliessendes*)", dice, "en un concepto".[118] Pero en el caso de los objetos, nos dice que objetos como el número 1 son siempre el mismo.[119] En este último sentido podemos diferenciar a los conceptos de los objetos según lo expresado en *GlA*, pues en ningún momento se identifica un objeto con una función, y precisamente son las funciones, entendidas en el sentido más general, con quien Frege contrastará los objetos en escritos posteriores a *GlA*. En su artículo "Sobre función y concepto" de 1891, admitirá finalmente que no se puede definir lo que es un objeto y lo que es una función, por lo cual éstas serán las nociones lógicas primitivas a las que se reduce su filosofía de la matemática. Allí dice:

> [...] nos preguntamos ahora qué llamamos aquí objeto. Estimo que de esto es imposible dar una definición escolar pues estamos ante algo que por su simplicidad no admite una división lógica. Solamente se puede señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo se puede afirmar escuetamente: objeto es todo lo que no es función, todo aquello cuya expresión no lleva consigo un lugar vacío.[120]

El ámbito objetivo también puede ser caracterizado desde una perspectiva un tanto epistemológica, como vimos en la cita de la §26. Como

---

[117]Ibid. §46, p. 60.
[118]Ibid.
[119]Ibid. §38, p. 49.
[120]*KS*, p. 134.

anuncia Frege en su introducción, pero desgraciadamente sin elaboración posterior, quizás algún lector tendrá que "revisar su teoría del conocimiento."[121] Según Frege, el dictum kantiano de que todo objeto es dado a través de la sensibilidad, es incorrecto, pues ni el cero ni el uno pueden ser dados de esa manera,[122] y en general cualquier número puede sernos dado sin tener que recurrir a la sensibilidad. Frege hace esto claro cuando critica duramente a J. S. Mill, como representativo de una concepción empirista de la aritmética.[123] Para Frege, los números no tienen en sí un origen sensible.

Por otro lado, cuando Frege habla de conceptos o de objetos en *GlA*, no nos habla de pensarlos o imaginarlos, sino de reconocerlos (*erkennen*, *wiedererkennen*).[124] Como veremos más adelante, tal reconocimiento se puede tomar, en el caso de los objetos, como un criterio para la existencia, tal como ha sostenido Jan Dejnozka.[125] Un objeto debe poder ser identificado como uno y el mismo. En el caso de los conceptos, éstos tienen que ser captados por la mente en su "forma pura" con los "ojos del alma".[126] En cuanto a los números, de entrada nos dice que una vez obtenido un concepto por abstracción — podemos obtenerlo también mediante definición, pues de otra manera no se darían conceptos bajo los cuales no caiga ningún objeto —, el número que le corresponde a dicho concepto es "descubierto" (*endeckt)*.[127] No tienen pues los números tampoco un origen subjetivo. Frege, sin embargo, nunca elaboró una epistemología para estas entidades objetivas no sensibles, más alla de ofrecer los criterios para identificarlas que ya hemos mencionado.

---

[121] *GlA* XI.
[122] Ibid. §89, p.101.
[123] Ibid. §§7-9.
[124] Ibid. v, vii, §28, p. 39.
[125] Dejnozka, "Frege: Existence defined as identifiability" (1982).
[126] *GlA* VII.
[127] Ibid. §48, p. 61.

§8 Identidad de objetos y equinumerosidad entre conceptos

En su introducción, en la §62, y en varios pasajes de la quinta parte de *GlA*, titulada "Conclusión", Frege nos dice que su tarea de definir lo que son los números se podrá reducir a fijar el sentido (o contenido) de una identidad (o juicio de reconocimiento).[128] Y de hecho, Frege agrupa en el índice de la obra las §§62-69, que contienen el segundo y el tercer y final intento de definir el concepto de número, bajo un título que dice que para obtener dicho concepto hay que fijar el sentido de una "identidad numérica" (*Zahlengleichung*).[129] Debemos pues darle la importancia sugerida por Frege a esta aseveración y tratar de dilucidar de qué manera él mismo siguió este camino. Pero primero hay que aclarar, que en *GlA*, como hemos dicho más arriba, todavía no se hace la distinción entre sentido y denotación para el contenido de un juicio, la cual fue incluida en *GgA*. A la misma vez, Frege considera las igualdades o ecuaciones de la aritmética (e.g. '1=1', '2+2=4', etc.) como identidades,[130] que a su vez pueden ser consideradas como casos particulares a la matemática de juicios de reconocimiento. Mediante estos últimos debemos, según Frege, poder reconocer a un objeto como uno y el mismo y diferenciarlo de cualquier otro objeto.

En el rechazo de su primer intento de definición de los números de la §55, donde define el cero, el uno, y el sucesor de un número aludiendo a la estrategia que había citado de Leibniz, según la cual cada número se define "en términos de su antecesor",[131] Frege señala que dichas tres definiciones que ha ofrecido no permiten "demostrar" una "identidad numérica", puesto

---

[128]*GlA*, X, §§62, 63, 104, 106, 107, 109, y una nota al calce en p. 72.
[129]Ibid. X, p. 73.
[130]Ibid. §57, p.69.
[131]Ibid. §6, p. 8.

que no han definido al cero y al uno como objetos que sean "reconocibles" y diferenciables.[132] De un modo similar, en el rechazo de su segundo intento de definición de la §65, él nos dice que la definición que ha ofrecido del concepto de dirección, que toma como ejemplo correspondiente al concepto de número, en términos de paralelismo entre dos rectas, correspondería a la "identidad numérica",[133] no es suficiente para establecer en todos los casos la identidad entre dos direcciones, o más exactamente, para reconocer una dirección como uno y el mismo objeto a pesar de que sea posible referirse a ella de distintas maneras.[134]

Luego, para defender la definición de número que finalmente da y acepta en la §68, Frege ofrece una prueba de la adecuación de la misma diciendo que la igualdad entre dos números se da siempre que los conceptos a los que cada uno pertenece sean "equinuméricos", lo cual a su vez quiere decir que existe una relación que hace corresponder biunívocamente a los objetos que caen bajo uno de dichos conceptos con los que caen bajo el otro. Veamos esta justificación con algún detalle. Primero señala que los números y las extensiones de algunos conceptos tienen las mismas condiciones de identidad, pues siempre que dos de tales conceptos tengan la misma extensión tendrán también un mismo número que les pertenezca.[135] Por ende, se puede aceptar la definición de los números en términos de extensiones de algunos conceptos. Y por esta precisa razón rechaza que los números sean conceptos, puesto que dos conceptos distintos pueden tener la misma extensión; y, por supuesto, dos distintos conceptos pueden tener un mismo número de objetos que caigan bajo cada uno de ellos, y por ende los números y los conceptos no

[132]Ibid. §56, p. 68.
[133]Ibid., Nota en §65, p. 76; §68, p. 79.
[134]Ibid. §66, p. 77-8.
[135]Ibid. §69, p.80.

tienen las mismas condiciones de identidad.[136] Luego se equipara la identidad de extensión con la equinumerosidad entre conceptos, la cual no es definida con base en el concepto de número, puesto que se cometería un error de circularidad, sino con base en la relación lógica de correspondencia biunívoca (también llamada en español aplicación biyectiva), equiparando mediante definición el significado de dos expresiones:

> [...] la expresión "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la expresión "existe una relación ϕ, que hace corresponder biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los objetos que caen bajo el concepto G". [137]

Entonces, para justificar dicha última definición, él muestra que siempre que las extensiones de dos conceptos sean una y la misma, es decir, idénticas, también ambos conceptos son equinuméricos y viceversa.[138]

En resumen, para justificar la tercera y final definición del concepto de número, Frege considera la igualdad entre condiciones de identidad de dos entidades como justificación de la definición de una en términos de la otra. Primero, la definición del número que pertenece al concepto F en términos de la extensión de un particular concepto, a saber, la extensión del concepto "equinumérico con el concepto F", es defendida con base en el hecho de que

> la proposición que dice que la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la extensión del concepto "equinumérico al concepto G" es verdadera siempre y cuando sea

[136]Ibid. Nota al calce en p.80.
[137]Ibid. §72, p. 85.
[138]Ibid. §73, pp. 85-6.

> también verdadera la proposición "el número que le pertenece al concepto F es el mismo que le pertenece al concepto G".[139]

Entonces, reconocer mediante una identidad al número que pertenece a un concepto F como uno y el mismo es equivalente a reconocer mediante una identidad que la extensión que pertenece al concepto "equinumérico con dicho concepto F" es una y la misma. Y segundo, la identidad entre las extensiones de los conceptos "equinumérico al concepto F" y "equinumérico al concepto G" se da siempre que se dé la equinumerosidad de los conceptos F y G,[140] lo cual, como hemos citado más arriba se reduce a una relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo el concepto F y los objetos que caen bajo el concepto G. Por ende, reconocer mediante una identidad que la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la extensión del concepto "equinumérico al concepto G" es equivalente a reconocer la existencia de una relación entre los objetos que caen bajo F con los objetos que caen bajo G que sea de correspondencia biunívoca o biyectiva. Y por lo tanto, uniendo lo primero con lo segundo, reconocer mediante una identidad que el número que le corresponde a dos conceptos es uno y el mismo equivale a reconocer una relación lógica entre los objetos que caen bajo dichos conceptos. De esta manera, Frege parece establecer el sentido que buscaba para una igualdad numérica, o más precisamente, define el sentido de la proposición "el número que le pertenece al concepto F es el mismo que el que le pertenece al concepto G",[141] llamada por Dummett la equivalencia original, lejos del alcance de la intuición sensible y dentro del dominio de la lógica. Así se obtiene un "criterio" para la

[139]Ibid. §69, p. 80.
[140]Ibid. §73, p. 85.
[141]Ibid. §62, p. 73.

identidad de los números que por tanto permite reconocer un número determinado como uno y el mismo, después de lo cual podemos asignarle un nombre propio.[142] Dummett, en su obra temprana, descartaba la utilización del criterio de identificabilidad en la definición final de Frege por razones que veremos más adelante en la discusión de las definiciones contextuales.

El propósito de Frege no es, sin embargo, simplemente asignar un sentido, preferiblemente en términos lógicos, a las ecuaciones matemáticas que considera identidades, sino, mediante esto, definir el concepto general de número y luego los números particulares. Para este fin, nos trata de aclarar en la §62 y en las §§ siguientes cómo, en vez de pasar de una definición del concepto de número, presuponiendo el concepto general de igualdad, a la igualdad entre los números, elige otro camino, a saber: a partir de la definición de la identidad de los números se obtiene el concepto de número. Frege reconoce que ésta es una estrategia de definir un tanto extraña.[143]

§9 Definiciones contextuales

Como hemos dicho anteriormente, Frege en los *GlA* utiliza el principio del contexto para, según sus palabras, evitar el que se asocie una representación - es decir, una imagen subjetiva - con el significado de los términos numéricos. Esta aseveración se ha tomado por algunos como una normativa que debería exigir el uso de definiciones contextuales para definir cualquier término abstracto, donde por "término abstracto" se entiende cualquier término que no pueda de manera alguna ser definido ostensivamente, como "cero" o "0", los cuales, como hemos dicho, Frege toma como nombres propios de objetos que no son espacio-temporales. Pero,

---

[142] Ibid.
[143] Ibid. §63, p. 74.

como hemos señalado, Frege mismo no usa la expresión "definición contextual" en sus textos. Usa en los *GIA* indistintamente *Definition* y *Erklärung*.[144]

Generalmente, se ha tomado la definición - del llamado segundo intento de definición - ofrecida en la §65 como contextual, a saber:

> (II)...definición: sea la proposición "la recta a es paralela a la recta b" sinónima de la proposición "la dirección de la recta a es la misma que la dirección de la recta b."[145]

De esta manera se obtiene el concepto de dirección, puesto que, tomando al paralelismo como una relación de igualdad, se introduce el término "dirección" para designar aquello que es común a "la recta a" y a "la recta b." En palabras de Frege, "distribuimos el contenido especial de [la primera proposición] entre a y b."[146] Pero, por supuesto, lo que interesa es el concepto de número y no el de dirección. Para esto, Frege sostiene que por la relación de paralelismo entre rectas podemos tomar de igual modo la de equinumerosidad entre conceptos,[147] y según esto, **II** equivaldría a decir que la proposición "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la proposición "el número que pertenece al concepto F es el mismo que pertenece al concepto G", sinonimia que Dummett llama la "equivalencia original", y que, como ya hemos visto, Frege sostendrá que "hay que demostrar" para justificar la tercera definición (**III**) que finalmente acepta. Nos dice en la §73:

---

[144]Véase entre muchos pasajes, el de la definición que citamos a continuación.
[145]*GIA* §65, p. 76.
[146]Ibid. §64, p. 74-75.
[147]Ibid. Nota en la §65, p. 76.

> (**A**) [debemos demostrar] que el número que le pertenece al concepto F es el mismo que le pertenece al concepto G, [exactamente] cuando el concepto F es equinumérico al concepto G.[148]

Lo cual, puesto que se ha definido anteriormente la frase "el número que corresponde al concepto F" en términos de "la extensión del concepto "equinumérico al concepto F""[149] equivale a demostrar que:

> la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la del concepto "equinumérico al concepto G", [exactamente] cuando el concepto F es equinumérico al concepto G.[150]

Frege da esto último por demostrado en la misma §73, y según él, así se justifica su definición sin hacer uso de la intuición.[151]

Podemos ver entonces que Frege no parece haberse desviado esencialmente del camino que emprendió en el citado segundo intento de definición (II), si bien parece significativo el hecho de que **II** fue ofrecida como una definición, mientras que **A** se ofrece como una justificación de **III**. Pero, primeramente, no considera necesario dar el significado de lo que es una recta ni de lo que es una extensión de concepto, ni siquiera de las frases "la recta a" o "la extensión del concepto "equinumérico al concepto F"". Si bien, por un lado dice en una nota que se supone que se conoce de antemano lo que es una extensión de concepto,[152] y por otro dice que no le da demasiada importancia

148 Ibid. §73, p. 85.
149 Ibid. §68, p. 79-80. §72, p. 85.
150 Ibid. §73, p. 85.
151 Ibid.
152 Ibid. §68, p. 80.

a las extensiones de conceptos.[153] Lo cierto es que en *GlA*, él piensa que basta con hallar un sentido para la identidad entre números, que equivale a una identidad entre extensiones de conceptos, y que no hace falta buscar el significado del número que corresponde a un concepto en aislamiento. Como hemos visto, la identidad entre extensiones equivale a la equinumerosidad entre conceptos, lo cual se da si existe una relación lógica de correspondencia biunívoca entre los conceptos en cuestión. Parece suficientemente aclarado para Frege lo que es una extensión de conceptos en el contexto de una identidad entre extensiones, pues se fija el "sentido" de dicha identidad y no propiamente el de una extensión dada.

No empece a lo anterior, los estudiosos de Frege generalmente coinciden en que el segundo intento de definición (**II**) es contextual y el tercero no lo es. Una y otra vez podemos leer que Frege abandonó su estrategia contextual y adoptó una de definición explícita, pues se sostiene que es explícita la definición ofrecida en la §68 y recalcada en la §72 del número que pertenece al concepto F en términos de la extensión del concepto "equinumérico al concepto F". Pero nos debemos preguntar, cómo es explícita la definición de la frase "el número que pertenece al concepto F", si se le define en términos de algo cuyo significado no está establecido, y que a lo sumo se intenta establecer contextualmente. Tan sólo encontramos afín a nuestra interpretación la opinión de J. Dejnozka, que en su artículo "Frege: existence defined as identifiability" llega a la conclusión de que:

> Frege does not give up contextual definition, but rather substitutes one kind of identity definition [(**II**)] for another [(**III**)], upholding the requirement

[153]Ibid. §107, p. 117.

> of an identity criterion for introducing denoting expresions.

Si bien, como hemos visto, Frege parece que intenta definir contextualmente las extensiones de conceptos, tal como en **II** intentó definir contextualmente al número que pertenece a un concepto. Habría que decir que no se pudo pasar directamente de la identidad numérica a la equinumerosidad entre conceptos, y por ende tuvieron que mediar algunas extensiones de conceptos, en términos de las cuales se definieron los números, cuya identidad sí se podía establecer que equivalía a la equinumerosidad entre conceptos.

Por su parte, Dummett sostiene que Frege no rechaza su segundo intento de definición (**II**) por el hecho de ser contextual, pero, sin embargo, escoge una definición explícita en su tercer y final intento (**III**). Es decir que ni utilizó ni rechazó la estrategia contextual en su segundo intento, cuando sí la utilizó en su primero, lo cual nos parece una interpretación que no hace justicia al rigor que exigía Frege de su estudio. Citemos a Dummett:

> [...] it is clear that he does not reject the suggested contextual definition [en la §65] simply because it is a contextual definition. [...] contextual definition is expressly defended in the *Grundlagen*, the example being given [en la §60, nota] with approval, of the definition, in terms of limits, of the standard notation for differentiation.[154]

Y más adelante sostiene que, luego de ser rechazado el segundo intento (**II**):

> Frege's solution was, of course, to give an explicit definition of the functional expresion in terms of classes [extensiones de conceptos]. [...] making it

[154]Dummett, *Frege: Philosophy of Language* (1973, 1981), p. 496.

> more plausible that names of numbers and of directions can be regarded as having reference.[155]

Y en su más reciente obra sobre la filosofía de la matemática de Frege, sostiene la misma posición general:

> [...] the contextual definition [(II)] had a solution, but not a unique one; it therefore had to be replaced by an explicit definition, providing a determinate solution. There is no hint, in the text of *Grundlagen*, that from this any general objection to contextual definitions can be derived, and Frege's remarks in §60 make it very doubtful that he thought so.[156]

Dummett sostiene que, en sentido estricto, el dar un criterio de identidad no equivale a ofrecer una definición contextual, y por lo tanto ni siquiera el segundo intento puede ser considerado como contextual. Pues muestra, que el estipular los criterios de identidad constituye ofrecer definiciones contextuales sólo en el caso de que el lenguaje lógico en cuestión sea multi-sorteado, es decir, que tenga distintos tipos de variables que correspondan a distintos tipos de objetos.[157] Pero, como él mismo señala, tal lenguaje sería inconsistente con la demostración de la infinitud de la serie de los números naturales que ofrece Frege en *GlA*, la cual presupone que los números son objetos que no son físicos ni sensibles, pero que no deben ser distinguidos en tanto objetos de otros objetos que sí sean físicos y sensibles. Por ende, según Dummett, el segundo intento no es estrictamente contextual,

---

[155]Ibid. p. 501.
[156]Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics* (1991), p. 126.
[157]Ibid., p. 131-140.

y por ello se refiere al mismo como la "supuesta definición contextual".[158] Lo cual, nos parece que devalúa el contraste citado arriba entre el segundo y el tercer intento donde se dice que el primero es contextual y el segundo no lo es.

§10 Definición del concepto de número

Debemos aclarar de qué manera Frege define el concepto general de número. La definición del concepto general de número consiste de tres definiciones que se complementan, y que son reunidas en la §72. En dicho pasaje se define explícitamente, en términos de otra expresión, la expresión "n es un número", la cual es una de las maneras de designar el concepto de número. Una expresión que para Frege es más parecida al contenido de dicha frase lo sería "n cae bajo el concepto de número". En ambos casos, el resultado de la sustitución de la variable *n* por un nombre lo es un enunciado con un valor veritativo. Frege dirá efectivamente que los conceptos son funciones de un argumento que "denotan" un valor veritativo cuando su variable es sustituida por un nombre que denote un objeto determinado. Este vínculo entre lo que es un concepto y los valores veritativos que son denotados por el enunciado resultante de una tal sustitución — como "0 es un número" que es verdadera — parece arrojar alguna luz sobre la definición del concepto general de número ofrecida en *GlA*.

La expresión para el concepto de número es definida así:

> [**A**] la expresión "n es un número" es sinónima de la expresión "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde"[159]

---

[158] Ibid., e.g., p. 155.
[159] *GlA* §72, p. 85.

Si definimos con Frege, un concepto en términos de una función cuyo valor es siempre un valor veritativo, entonces la sinonimia que estipula dicha definición sería más bien una equivalencia tautológica, en donde, para los mismos nombres de objetos como argumentos, ambas expresiones denotan el mismo valor veritativo. De esta manera se define una expresión conceptual, para decir así, en términos de otra expresión conceptual, ambas de las cuales contienen una misma variable *n* cuya sustitución apropiada produce un enunciado en cada caso. Si bien, de esta manera se está interpretando laxamente la segunda expresión, ignorando el carácter existencial del enunciado resultante y sólo enfocando el hecho de que se obtiene un valor veritativo al sustituir la variable *n*. Se debe añadir que según sus escritos posteriores, y dado que Frege dice en un pasaje de *GlA* que la existencia es una propiedad de conceptos, la segunda expresión sería interpretada por Frege como un concepto también, pero de segundo orden.

Independientemente de los objetos físicos que existan en el mundo y más aún de los que han sido percibidos sensiblemente, Frege nos ofrece un grupo, por decir así, de conceptos a los cuales corresponden cada uno de los números naturales, pero bajo los cuales no caen objetos físicos ni sensibles. Se asegura así la verdad de la segunda expresión conceptual citada ("hay un concepto ...") para cada uno de los números naturales como argumento, mediante lo cual se asegura la equivalencia tautológica entre ambas expresiones. Para 0, "0 es un número" es un enunciado verdadero — y deseable que lo sea si es que la definición del concepto de número de Frege ha de corresponder intuitivamente al sentido común de lo que son los números — si y sólo si es verdadero que "hay un concepto tal que 0 es el número que le corresponde". Frege nos ofrece el concepto "desigual a sí mismo", puesto que ningún objeto corresponde a dicho concepto, y, por esto, 0 es el número que corresponde a dicho concepto. Por ende, ambas expresiones de la definición citada se convierten en enunciados verdaderos si se sustituye a *n* por "0". La expresión conceptual "desigual a sí mismo" se expresaría más claramente mediante la expresión "*a* cae bajo el concepto 'desigual a sí mismo'", donde *a* es la variable que puede ser sustituida por un nombre de un objeto.[160] Para 1 como argumento, nos ofrece el concepto "igual a 0", puesto que sólo un objeto cae bajo dicho concepto, el 0, y por ende le corresponde al mismo el número 1. Para 2 como argumento, ofrece el concepto "perteneciente a la serie de números naturales que termina con 1",[161] bajo el cual caen el 0 y el 1, y por ende le corresponde el número 2. Continuando de esta manera se ve que hay un concepto para cada uno de los números naturales. Por lo tanto, se asegura la equivalencia entre las dos expresiones citadas.

Pero, ¿cómo se da el paso a partir del saber que no hay ningún objeto que caiga bajo el concepto "desigual a sí mismo", a la declaración de que esto equivale a decir que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto? Y en general, ¿Cómo se pasa de la asociación de unos objetos con un concepto a la asociación de un número con dicho concepto? Según Frege, sorprendentemente, no se da directamente mediante definición, pues esto es precisamente lo que rechaza en la §55, donde dice que:

> Es tentador definir: el número 0 le corresponde a un concepto cuando ningún objeto cae bajo él. Pero aquí parece que se coloca en el lugar de 0 su sinónimo "ningún"; por lo que es preferible la siguiente formulación: el número 0 le corresponde

[160]Ibid. §74, pp. 87-88.
[161]Ibid. §§81, 82, p. 94.

> a un concepto si para todo *a* vale la proposición de que *a* no cae bajo dicho concepto.[162]

Esta definición y las similares para el 1 y (n+1) son rechazadas de inmediato porque:

> [...] no podemos diferenciar mediante nuestras definiciones si el número Julio César le corresponde a algún concepto, [o lo que es lo mismo] si ese conocido conquistador es un número o no.

En efecto, una serie de definiciones de este tipo no serían suficientes para decidir el valor veritativo de "Julio César es un número", y por lo tanto no definen completamente el concepto general de número. Pues se definen las frases "el número 0 corresponde a", "el número 1 corresponde a", etc.,[163] pero esto no es suficiente para definir la frase "el número Julio César corresponde a". Para Frege, además de los números individuales, hay que definir también el concepto de número, es decir, hay que ofrecer la propiedad que es común a todos los números y que hace que todos ellos sean reunibles bajo dicho concepto.

Dicha propiedad tiene que ver directamente con el "sentido de una identidad numérica". Los números se distinguen de otros objetos por la manera de identificarse, por la manera de reconocer a uno de ellos como uno y el mismo. Como hemos discutido más arriba, Frege encuentra que el sentido de una identidad numérica consiste en la relación de correspondencia biunívoca. Haciendo uso de las nociones lógicas de objeto, concepto, y relación, vimos que el sentido de la proposición "el número que corresponde

---

162 Ibid. §55, p. 67.
163 Ibid. §55, p. 68.

al concepto F es el mismo que el que le corresponde al concepto G" es, por decir así, un caso particular a la aritmética de la relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo los conceptos F y G. Pero Frege no realiza esta reducción directamente, sino que antes, como vimos, introduce la noción de extensión de concepto, la cual por un lado tiene las mismas condiciones de identidad relativo a los conceptos que los números, y por otro dichas condiciones de identidad son equivalentes a la equinumerosidad entre conceptos. Entonces, las extensiones de conceptos parecen servir de puente entre la identidad numérica entre conceptos y la equinumerosidad entre conceptos. Esto se ve en la segunda parte de la definición del concepto de número,

> [**B**] el número que le corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico al concepto F",[164]

donde claramente las extensiones median entre los números y la equinumerosidad. Entonces, para determinar el número de objetos que caen, e.g., bajo el concepto "desigual a sí mismo", según Frege, hay que entender lo que significa la expresión "la extensión del concepto 'equinumérico al concepto 'desigual a sí mismo''", en la cual hay que aclarar dos nociones importantes: extensión y equinumerosidad. La equinumerosidad entre conceptos es definida en la tercera parte de la definición del concepto general de número:

> [**C**] la expresión "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la expresión "hay una relación ϕ, que ordena por correspondencia

---

[164] Ibid. §§68, 72.

> biunívoca los objetos que caen bajo el concepto F
> con los objetos que caen bajo el concepto G".[165]

A la misma vez, si bien Frege no considera necesario aclarar lo que es una extensión de concepto — ya sea por que se presupone su comprensión o porque se piensa que no es necesaria la misma —, lo cierto es que, como vimos, Frege considera necesario demostrar que la identidad entre extensiones equivale a la equinumerosidad definida en términos de correspondencia biunívoca.[166] Por ende, las extensiones de concepto sirven de puente entre la identidad numérica y la relación lógica de correspondencia biunívoca, que, como hemos dicho, es el sentido lógico de la identidad numérica.

Nos parece claro sin embargo, que aún con la aclaración de las condiciones de identidad de las extensiones de conceptos, primero en términos de la identidad de un número que corresponda a dos conceptos, y luego en términos de la correspondencia biunívoca por medio de la equinumerosidad, no podemos decir con base en lo expresado en *GlA* lo que significa la expresión "la extensión del concepto 'equinumérico al concepto 'desigual a sí mismo''", ni en general lo que es la extensión de cualquier concepto. Por lo tanto, no se tienen en *GlA* los medios para determinar el número que le corresponde a un concepto dado, a partir del hecho de que unos objetos caigan bajo dicho concepto, puesto que para ello tienen que mediar las extensiones de conceptos si es que se le da importancia a la definición [**B**]. Entonces, si median las extensiones de conceptos, no podemos determinar para todo argumento, el valor veritativo de la expresión "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde" en [**A**], y, por lo tanto, el

---

165Ibid. §72, p. 85.
166Ibid. §73, pp. 85-86.

concepto de número significado por la expresión "*n* es un número" no parece estar completamente definido.

Por otra parte, Frege ofrece una demostración de que 0 es el número que le corresponde a un concepto siempre que bajo dicho concepto no caiga ningún concepto. Pero, muy significativamente, en dicha demostración no utiliza explícitamente la noción de extensión de concepto. Según él, si se demuestra que

> todo concepto bajo el cual no caiga [ningún objeto] es equinumérico a todo concepto bajo el cual no caiga [ningún objeto] y solamente a un tal concepto,[167]

entonces se sigue que 0 es el número que le corresponde a cualquiera de dichos conceptos. Por ende, si el concepto "desigual a sí mismo" es equinumérico a todo concepto bajo el cual no cae ningún objeto, entonces, según Frege, se sigue que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto y también a todos los conceptos que sean equinuméricos con el mismo. A la vez, Frege sostiene que su definición de equinumerosidad, en términos de la existencia de una relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo los conceptos equinuméricos, vale incluso en el caso de que no caigan objetos bajo los conceptos dados.[168] Pero, dejando a un lado esta incomodidad, lo importante es señalar que Frege no dice explícitamente en virtud de qué se puede concluir que 0 es el número que le corresponde al concepto "desigual a sí mismo" a partir de que dicho concepto sea equinumérico a todo concepto bajo el cual no caiga ningún concepto. Tan sólo parece que podemos inferir de esto último que no cae ningún objeto bajo

---

[167]Ibid. §75, p. 88.
[168]Ibid. §71, pp. 83-84.

dicho concepto, puesto que la equinumerosidad está propiamente definida como hemos dicho. Pero a partir de aquí, como vimos, no se puede pasar directamente a decir que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto. De acuerdo a la división en tres partes de la definición del concepto de número, tienen que mediar las extensiones de conceptos para poder pasar de la relación lógica de correspondencia biunívoca a la identidad de los números en la aritmética, a partir de la cual se debe obtener el concepto general de número. Entonces, mientras la noción lógica de extensión de concepto permanezca sin aclarar suficientemente, parece incompleta la definición del concepto de número.

En el caso de los números infinitos, Frege define a ∞_1 como el número que corresponde al concepto "número finito",[169] el cual es definido a su vez diciendo que

> la proposición "*n* en un miembro de la serie de los números naturales que comienza con 0" será sinónima de la proposición "*n* es un número finito",

en donde se define nuevamente una expresión conceptual que contiene una variable en términos de otra expresión conceptual que contiene la misma variable. En cuanto a que existe un concepto al cual él le corresponde ("número finito"), el número ∞_1 es un número como cualquier otro. Según Frege:

> En el número infinito ∞_1 así definido no hay nada lleno de misterio o maravilloso. [La expresión] "el número que corresponde al concepto F es ∞_1" quiere decir ni más ni menos que: hay una relación

[169]Ibid. §84, p. 96.

> que ordena por correspondencia biunívoca a los objetos que caen bajo el concepto F con los números finitos.[170]

En esta ocasión, puesto que el número ∞_1 ha sido definido previamente como el número que corresponde al concepto "número finito", la expresión "el número que corresponde al concepto F es ∞_1" no es más que una instancia de la llamada equivalencia original, a saber, "el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G", la cual fue definida en términos de la relación de correspondencia biunívoca. Pero como vimos, dicha definición se hace en una suerte de cadena en donde entre la identidad numérica y la relación de correspondencia se encuentran las extensiones de conceptos, las cuales, por no ser aclaradas en *GlA*, desmerecen el sistema lógico al cual Frege pretende reducir las nociones aritméticas. A la misma vez, el hecho de que se trate de reducir la identidad numérica a la noción lógica de la relación de correspondencia biunívoca, pone de manifiesto el intento de obtener el concepto de número a partir de nociones lógicas, y no como producto de la experiencia sensible como sostenía J. S. Mill ni de la intuición como sostenía Kant.

§11 Conclusión de Frege sólo verosímil

En el quinto capítulo de *GlA*, Frege hace claro que su estudio no es definitivo hasta tanto no se expresen las definiciones y se deriven los teoremas aritméticos mediante un lenguaje lógico formalizado. En efecto, su próximo libro acometerá dicha tarea utilizando el lenguaje de *BS*. En lo que respecta a *GlA*, nos dice:

---

[170]Ibid. §84, p. 97.

> Yo no pretendo haber hecho la naturaleza analítica de las proposiciones aritméticas más que verosímil (*wahrscheinlich*), porque siempre se podría dudar si su justificación puede ser obtenida completamente a partir de leyes puras de la lógica, o si alguna otra premisa está involucrada en algún lugar sin ser notada.[171]

Recordemos que la derivabilidad o justificación de los teoremas de la aritmética a partir de definiciones y leyes generales de la lógica establece para Frege el carácter analítico de dichos teoremas. Pero Frege decide posponer dicha conclusión hasta que las definiciones y las derivaciones sean ofrecidas con todo el rigor que su simbología de *BS* introdujo a la lógica.

---

[171] Ibid. §90, p. 102.

Capítulo II: *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903)

§12 Nociones lógicas primitivas

El proyecto logicista de Frege, mediante el cual éste pretendía demostrar la reductibilidad de la aritmética a la lógica, no consistió meramente de una formalización de la aritmética misma, sino que se basó también en innovaciones tanto en la lógica como en la semántica. Por un lado, el sistema lógico que Frege había expuesto en su *BS*, además de introducir una simbología muy precisa para impedir que se dieran saltos en las derivaciones de teoremas, introdujo los cuantificadores, lo cual aumentó considerablemente la capacidad expresiva de un lenguaje lógico, a tal punto que la lógica se convirtió en un medio indispensable para el estudio de los fundamentos de las matemáticas y de cualquier otra ciencia formalizada. Todas estas aportaciones hacen de Frege una figura central en el surgimiento de la lógica matemática contemporánea. Por otro lado, los estudios semánticos de Frege, en los cuales el problema de la relación entre lenguaje y verdad fue el foco de atención, mientras que el problema de la relación entre mente y verdad fue dejado a un lado, dieron un impulso decisivo al surgimiento de la filosofía analítica contemporánea que centra su atención en el análisis del lenguaje considerado en sí mismo. En particular, en dicha tradición filosófica el lenguaje de la lógica dejó de incluir elementos psicológicos como el de idea o representación (*Vorstellung*), que, como señalara J. Alberto Coffa, había sido la noción más importante de la lógica desde la Lógica de Port-Royal de época e influencia cartesiana.[172]

La gran obra fregeana que pretendía demostrar de una vez y por todas la tesis logicista de la aritmética, *Die Grundgesetze der Arithmetik* (*GgA*),

[172]Coffa (1991), p. 9.

cuyo primer volumen se publica en 1893, pero cuyo segundo volumen es publicado en 1903, incorpora estudios sobre las nociones lógicas primitivas de función, concepto, relación, y objeto, que si bien fueron tratadas por Frege en *GlA*, no obstante fueron objeto de estudio más detenido por parte de Frege durante los años que separaron la publicación de dichas dos obras. A la misma vez, durante ese intervalo de tiempo, que, según Terrell Ward Bynum, fue uno de los más productivos en la carrera de Frege,[173] este último desarrolla su distinción semántica fundamental entre sentido (*Sinn*) y denotación (*Bedeutung*). Los resultados tanto del examen de las nociones primitivas de la lógica como del desarrollo de sus dos nociones semánticas fundamentales fueron publicados en diversos artículos justo antes de la publicación del primer volumen de *GgA*.[174] En la presente sección señalaremos la concepción de Frege de dichas nociones lógicas según son introducidas en *GgA*. En la próxima sección examinaremos las nociones semánticas de sentido y denotación, que, como vimos, según la propia admisión de Frege no habían sido consideradas en *GlA*.[175]

Como ya señalara Frege en *GlA*, las nociones de la lógica son consideradas por él objetivas en el sentido fregeano particular de dicho término que expusimos en la §7 del primer capítulo. Ellas pertenecen a un dominio "no-real objetivo", en el cual no tienen injerencia asuntos de índole psicológica o subjetiva. Por el contrario, según Frege:

> puesto que los lógicos psicologistas no comprenden
> la posibilidad de lo objetivo no-real, consideran que

---

[173]Bynum (1972), p. 30.

[174]Sobre las nociones de la lógica publicó: "Funktion und Begriff" en 1891 y "Über Begriff und Gegenstand" en 1892. Sobre las nociones semánticas publicó "Über Sinn und Bedeutung" en 1892 y poco después escribió un artículo que además de complementar a este último, también abundó sobre las nociones lógicas, y que fue publicado póstumamente con un título puesto por los editores: "Ausführungen über Sinn und Bedeutung".

[175]Ver §6 del Capítulo I.

> los conceptos son representaciones, y por ende los hacen parte de la psicología.[176]

Como ya viéramos, Frege prefiere usar el término representación solamente en su sentido psicológico.[177] De esa manera evita su uso ambiguo, el cual, según, Coffa, puede ser hallado en obras tempranas de Kant.[178]

En *GgA*, las nociones de función y objeto se toman como primitivas, y se definen las de concepto y relación en términos de la de función. Por ende, la distinción fundamental ya no debe ser aquella exigida en *GlA*, a saber, entre concepto y objeto, sino que debe ser hecha entre función y objeto. Pero la distinción entre estas dos últimas no puede ser decidida mediante definición. En su artículo "Sobre función y concepto" de 1891, Frege admite que no se puede definir lo que es un objeto y lo que es una función, por lo cual éstas serán las nociones lógicas primitivas a las que se reduce su filosofía de la matemática. Allí dice:

> [...] nos preguntamos ahora qué llamamos aquí objeto. Estimo que de esto es imposible dar una definición escolástica (*schulgemäß*),[179] pues estamos ante algo que por su simplicidad no admite una división lógica. Solamente se puede señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo se puede afirmar escuetamente: objeto es todo lo que no es función, cuya expresión no lleva consigo un lugar vacío.[180]

---

[176]*GgA*, XVIII.
[177]Ibid..
[178]Coffa (1991), pp. 9, 375.
[179]Según Kluge (1980), p. 139, aquí Frege entiende por definición escolástica el tradicional método de división por género próximo y diferencia específica; como, por ejemplo, ser humano en términos de animal racional, y cuadrado en términos de paralelogramo de cuatro lados congruentes.
[180]*KS*, p. 134.

Así pues, si bien Frege pretenderá definir todas las nociones de la aritmética en términos de nociones objetivas de la lógica, tal completud para las definiciones no es posible, según él, en el caso de la lógica. Tan sólo se puede esclarecer lo que es una función o un objeto, puesto que su simplicidad lógica impide un análisis en términos de otras nociones.

Frege basa su distinción entre función y objeto principalmente en el carácter particular que tienen las expresiones que les corresponden, a pesar de las dificultades que señaláramos que éste había encontrado al utilizar criterios gramaticales para distinguir objetos de conceptos en *GlA*.[181] Teniendo en mente como siempre la distinción entre el signo y lo designado,[182] Frege señala que reconocemos que

> [...] el contenido, la denotación de "$2 \times 2^3 + 2$" [es] la misma que la de "18" o de "3×6".[183]

Dicha denotación es, según Frege, el objeto particular denotado, en este caso el número dieciocho. Por otro lado, si bien las expresiones "$2 \times 1^3 + 1$", "$2 \times 4^3 + 4$" y "$2 \times 5^3 + 5$" también tienen como denotación un número particular en cada caso, podemos reconocer un contenido que es común a las tres, al cual llama Frege la función.[184] Considera pues que el elemento que es distinto en cada una de las expresiones no pertenece a dicha función. Por ende, Frege entiende que los argumentos 1, 4 y 5 no son parte de la función, y que la función en cuestión es lo que denota la expresión "$2 \times x^3 + x$", entendiendo a la variable x como demarcando un lugar vacío.[185] Por lo tanto, las expresiones para funciones se distinguen claramente de las expresiones para objetos,

[181] Ver §5 del Capítulo I.
[182] Frege, *KS*, p. 126.
[183] Ibid.
[184] Ibid., p. 128.
[185] Ibid.

puesto que no son "saturadas" y tienen al menos un lugar que puede ser ocupado por el nombre de un argumento.

Por otro lado, no podemos definir, según Frege, lo que es una función diciendo que es una expresión formada a partir de las notaciones para suma, producto, potencia, etc., y de variables y signos numéricos. De tal manera estaríamos definiendo meramente una expresión y no lo que ella significa.[186] Más bien, Frege entiende que la "esencia" de la función yace en la correspondencia que ella establece entre cada argumento y el valor que se obtiene cuando el mismo es colocado en el lugar demarcado por la variable, y que en el caso de las funciones matemáticas puede ser intuitivamente representada por una gráfica.[187]

Frege prefiere usar la letras griegas ξ y ζ en vez de las letras x e y. A la misma vez, no les llama variables sino lugares de argumentos (*Argumentstellen*).[188] De tal manera hace claro el hecho de que una expresión para una función no es completa en sí misma. Entonces, empleando las letras griegas Φ y Ψ como nombres para funciones —reservando las minúsculas como ϕ para variables para funciones, las cuales son llamadas a su vez argumentos del segundo tipo—, una función se podría expresar ya sea mediante $\Phi(\xi)$ o mediante $\Phi()$, pues la variable lo que hace es demarcar el lugar que debe ser ocupado por un nombre denotativo. La expresión para una función es completada mediante la colocación de un nombre para un argumento en un lugar de argumento, y la expresión resultante es el nombre del valor de la función para dicho argumento. Así pues:

[186]*GgA*, §1, p. 5; *KS*, pp. 125-26.
[187]Ibid., §1, p. 5.
[188]Ibid., p. 6.

> "$(2 + 3 \times 1^2) \times 1$" es un nombre del número 5, compuesto a partir del nombre de función "$(2 + 3 \times \xi^2) \times \xi$" y [del nombre del argumento] "1".[189]

En este caso, el número 5 es el valor de dicha función al tomar al número 1 como argumento.

Sin embargo, la noción fregeana de función no se limita a la propiamente matemática, pues de tal manera no podría ser una noción fundamental de la lógica. Frege admite también como nombres de funciones a expresiones como "$\xi^2 = 4$" y "$\xi < 2$", cuyos valores, según él, no son números, sino pensamientos verdaderos o falsos.[190] Nos dice Frege:

> [...] los nombres "$2^2 = 4$" y "$3 > 2$" denotan el mismo valor veritativo (*Wahrheitswerth*), al cual llamo simplemente lo verdadero.[191]

A la misma vez, en el caso de los nombres "$3^2 = 4$" y "$1 > 2$", según Frege, ambos denotan lo falso.[192] Para Frege, éstos también son nombres propios que denotan objetos, tal como "2" y "Aristóteles". La diferencia entre distintos nombres para uno y el mismo objeto estriba en que ellos tienen sentidos diferentes. Según Frege, "2^2" y "$2 + 2$" tienen la misma denotación pero distinto sentido.[193] De igual manera, "$2^2 = 4$" y "$2 + 2 = 4$" tienen la misma denotación pero distinto sentido, a los cuales llama Frege en estos dos últimos casos, por tratarse de nombres que denotan un valor veritativo, distintos pensamientos. Como se ve, Frege considera que ambos valores veritativos, lo verdadero y lo falso, son objetos, tal como lo son los números,

---

[189]Ibid.
[190]Ibid., §2, p. 6.
[191]Ibid., p. 7.
[192]Ibid.
[193]Ibid.

por lo que las expresiones que los denotan están completamente saturadas, y son llamadas por él nombres propios.[194]

Habiendo ampliado el dominio de los objetos para incluir no sólo números sino también valores veritativos, Frege amplía consecuentemente el dominio de los valores que pueden tener las funciones. Entonces, los conceptos y las relaciones serán definidos como funciones que tengan, para cualquier argumento, sólo valores veritativos como valores. Aquellas funciones de un solo argumento cuyo valor sea siempre un valor veritativo, son llamadas por Frege conceptos.[195] Las relaciones son definidas a su vez como funciones de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor veritativo.[196] Un ejemplo prototípico dado por Frege de un nombre de una relación lo es "$\xi = \zeta$".

Otra noción lógica fundamental, cuyo carácter ha dado pie a mucho debate entre los estudiosos de Frege, es la del curso de valor de una función. Ella, conjuntamente con un símbolo para reemplazar el artículo determinado del lenguaje natural, son las únicas nociones lógicas primitivas que Frege utiliza por primera vez en *GgA*[197] Por su parte, la noción de extensión de concepto, que en *GlA* había quedado indeterminada, es definida en *GgA* precisamente en términos de la noción de curso de valor.[198] Puesto que los números se definen también en *GgA* como extensiones de ciertos conceptos, entonces los números en *GgA* son definidos en términos de cursos de valores. Por otro lado, los valores veritativos son también definidos en términos de cursos de valores.[199] Consecuentemente, Frege dedica las §§3, 9, y

---

[194]Ibid.
[195]Ibid., §3, p. 8.
[196]Ibid., §4, p. 8.
[197]Ibid., IX.
[198]Ibid., §3, p. 8.
[199]Ibid., §10, p. 17.

10 a tratar de esclarecer dicha noción, que ya había expuesto en su artículo "Función y concepto" de 1891.

En dicho artículo, tal como comparaba distintos nombres con la misma denotación para esclarecer lo que es un objeto, tanto en el caso de los números como en el caso de los valores veritativos, compara dos nombres de funciones que en este caso tienen la particularidad de que expresan funciones que asignan los mismos valores para cada argumento. Utilizando un ejemplo de la geometría analítica, nos dice que si representamos los valores de una función mediante una gráfica en donde los argumentos estén representados en la abscisa y los valores a su vez en la ordenada, entonces la correspondencia entre los argumentos y los valores de la función en cuestión serán representados por un conjunto de puntos.[200] Frege nos ofrece el ejemplo de las expresiones para funciones "$x\ (x - 4)$" y "$x^2 - 4x$". Sorprendentemente, al ver que ambas establecen una y la misma correspondencia entre el dominio de los argumentos y el dominio del los valores, no nos dice que ambas expresiones denotan una y la misma función. Pues como vimos, más arriba, Frege luego dirá en la §1 de *GgA* que:

> La esencia de la función se da a conocer, por el contrario, en la correspondencia (*Zusammengehörigkeit*) que establece entre los números cuyos símbolos son puestos por la "x" y los números que aparecen como denotación de [la] expresión [resultante] [...][201]

Según Frege, la función es aquello que establece una correspondencia entre los argumentos y los valores, siendo llamada la dicha correspondencia misma

---

[200] *KS*, p. 129.
[201] *GgA*, §1, p. 5.

el curso de valores.[202] Como han señalado varios estudiosos,[203] Frege parece entender que la función misma es algo anterior y más fundamental que su curso de valores. En el caso de un concepto, Frege lo identifica, en la introducción de *GgA*,[204] si bien de manera sugestiva, con su nota característica, es decir, con la propiedad que debe tener un objeto para caer bajo el mismo. Si entendemos a dicha propiedad como la responsable de que unos objetos sean reunidos bajo un concepto dado, entonces esta interpretación parece estar de acuerdo con lo que Frege había dicho en su artículo inédito "Ampliaciones (*Ausführungen*) sobre sentido y denotación", donde declaraba que:

> Si bien hay que conceder a los lógicos intensionalistas que el concepto es lo fundamental [lo originario] frente a su extensión, esto no quiere decir que éste sea el sentido de la palabra de concepto, sino que es su denotación; los lógicos extensionalistas se acercan más a la verdad en tanto presentan, en la extensión, una denotación como lo esencial. Aun cuando dicha denotación [la extensión] no es el concepto mismo, ella está estrechamente vinculada al mismo.[205]

Retomando el método de comparación de expresiones para introducir nociones nuevas, Frege nos presenta las expresiones "x (x - 4)" y "x^2 - 4x", nos dice que ambas tienen el mismo curso de valores.[206] Sin embargo, Frege no

[202] En "Función y concepto", Frege nos dice que la gráfica generada por la función hace corresponder a cada argumento con un valor, lo cual nos permite representarnos "los valores de una función para distintos argumentos", *KS*, p. 129.
[203] Ver Sluga (1980), pp. 145-146; y Avila (1988), pp. 26-27.
[204] *GgA* IX, XIV.
[205] *NS*, p. 134.
[206] *KS*, p. 129.

entiende que ellas denotan uno y el mismo curso de valores, sino que cada una denota una función diferente. De tal manera rompe con el patrón que hemos visto de introducir nociones primitivas nuevas mediante el señalamiento de que dos o más expresiones dadas tienen algo en común como denotación. Dice Frege:

> Cuando escribimos $x^2 - 4x = x(x - 4)$, de tal manera no hemos igualado una función con la otra, sino que sólo hemos igualado los valores de una función con los de la otra.[207]

En la §3 de *GgA*, Frege introduce la noción de curso de valores utilizando un procedimiento semejante al de la llamada "equivalencia original" que vimos en el primer capítulo, y que es similar a la llamada definición contextual de la frase "el número que pertenece al concepto F" del la §65 de *GlA*. Nos dice:

> En general, yo utilizo las palabras "la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo curso de valores que la función $\Psi(\xi)$" con el mismo significado (*gleichbedeutend*) que las palabras "las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento".[208]

Esta estipulación, según Frege, debe ser considerada como una ley lógica que expresa la posibilidad de la transformación de generalidad de una igualdad en una identidad entre cursos de valores.[209] La misma es adoptada por Frege, en su versión formalizada, como uno de los axiomas de su sistema lógico, a saber, el principio V.[210] Sobre el mismo, Frege expresó reservas en el propio

[207] Ibid., p. 130.
[208] *GgA*, §3, p. 7.
[209] Ibid., §9, p. 14;
[210] Ibid., §20, p. 36.

prólogo de *GgA*,[211] Aun así, Frege basó en el mismo la introducción de los cursos de valores de funciones, si bien no tomó el mismo como una definición propiamente. Las nociones lógicas primitivas de su sistema quedan pues esclarecidas, pero no propiamente definidas. En cuanto a la notación, Frege introduce la expresión '$\grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$', cuya denotación será el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$.[212]

§13 La distinción semántica fundamental

Luego de exponer las indicaciones de Frege acerca de cómo se deben comprender sus nociones lógicas primitivas, no podemos pasar a examinar cómo Frege define nuevas nociones en términos de aquéllas, sin antes tener una teoría semántica que explique el alcance que deban tener las definiciones. Como vimos en la §6 del primer capítulo, las definiciones ofrecidas en *GlA* son semánticamente inadecuadas, puesto que no se especifica allí el carácter del significado que mediante definición se estipulaba que era compartido por dos expresiones. En particular, vimos como Frege, en su artículo "Función y concepto" declaraba que toda definición estipula el sentido o la denotación de un signo, y que si no se toma en cuenta dicha distinción semántica no se puede hablar de definición.[213] En el pasaje aludido, que de hecho Frege pone como una nota al calce, no nos dice, sin embargo, que una definición deba estipular tanto el sentido como la denotación de un nuevo signo. Pero en la §27 de *GgA*, Frege dice que:

> Introdujimos mediante una definición un nuevo nombre, mediante lo cual determinamos que éste

[211] Ibid., VII.
[212] Ibid., §9, p. 15.
[213] *KS*, p. 127.

> tendrá el mismo sentido y la misma denotación que un [nombre dado] que sea compuesto a partir de signos conocidos.[214]

Tal vacilación está probablemente vinculada con las dificultades de la doctrina de Frege acerca de los enunciados de identidad. Las definiciones, de hecho, según Frege, una vez introducidas, deben ser entendidas como enunciados de identidad.[215] Pero dicha concepción difiere de la concepción de enunciados de identidad que Frege expone en su célebre artículo "Sobre sentido y denotación" de 1892, en donde se concluye que en un enunciado de identidad que sea verdadero, las dos expresiones unidas por el signo de igualdad tienen una misma denotación pero pueden tener distinto sentido. Si el sentido del enunciado de identidad es obtenido extensionalmente a partir de los sentidos de sus expresiones constituyentes, entonces los enunciados "a = a" y "a = b" tendrían distinto sentido, es decir, expresarían un distinto pensamiento, lo cual según Frege explica la diferencia en el valor cognoscitivo entre ambos enunciados.[216]

Por otro lado, el desarrollo de la distinción entre sentido y denotación se origina en Frege precisamente con el intento de aclarar el carácter de los enunciados de igualdad o identidad. Frege comienza y termina su artículo "Sobre sentido y denotación" utilizando su distinción para tratar de esclarecer la semántica de los enunciados de igualdad, si bien dedica una gran parte de su artículo para explicar cómo su distinción se podría aplicar a oraciones subordinadas del lenguaje natural. Pero principalmente, el interés de Frege se centra en las oraciones asertivas completas, las cuales son del tipo que interesa

---

[214] *GgA*, §27, p. 45.
[215] Ibid.
[216] *KS*, p. 162.

a cualquier ciencia, y de las cuales nos interesa principalmente su valor veritativo. De las mismas, los enunciados de identidad son un caso particular.

Según Frege, la diferencia entre las expresiones "el lucero de la tarde" y "el lucero del amanecer" consiste en que ellas tienen distinto sentido, aún cuando ambas tienen la misma denotación, es decir, ambas denotan uno y el mismo objeto.[217] De aquí, que la identificación de ambas expresiones tenga consigo un valor cognoscitivo. En *BS*, Frege había considerado que un enunciado de identidad expresaba la relación entre dos nombres o signos que tienen "el mismo contenido conceptual".[218] Pero dicha relación, está mediada por la conexión arbitraria que existe entre un signo y lo designado por dicho signo.[219] Por otro lado, si se dijera que es una relación entre lo que los signos en cuestión denotan, entonces dicha relación sería, en el caso de un enunciado de identidad verdadero, meramente una relación trivial, sin ningún valor cognoscitivo, pues consistiría en una relación de un objeto consigo mismo.[220] Frege postula entonces una entidad semántica intermedia, que denomina el sentido del signo, el cual consiste en el particular "modo de darse" (*Art des Gegebenseins*) de lo designado. De esta manera, el valor cognoscitivo que corresponde a la identificación del objeto denotado por la expresión "el lucero de la mañana" con el denotado por la expresión "el lucero de la tarde" tiene su origen en el distinto modo de darse el objeto según cada expresión, es decir, en el distinto sentido de cada expresión. Dicho valor cognoscitivo también es indicador de que la relación entre el sentido y la denotación no es arbitraria, aún cuando Frege destaque que el hecho de

[217] *KS*, p. 144.
[218] *BS*, §8, p. 126.
[219] *KS*, p. 143.
[220] Ibid.

haber captado un sentido no implica que a éste le corresponda una denotación.[221]

Por otro lado, el sentido de un signo no es subjetivo, ni consiste de intuiciones. El sentido no es por lo tanto una representación. Puede ser "propiedad común de muchos" y por ende se diferencia "esencialmente" de la representación. El sentido es por lo tanto objetivo, tal como lo es la denotación. Se encuentra entre la denotación, que es el objeto mismo, y la representación, la cual es subjetiva y privada. Frege nos ofrece una metáfora para intentar aclarar qué es lo que entiende por el sentido. Cuando una persona observa la luna a través de un telescopio, se pueden distinguir claramente tres elementos en dicha situación: la luna misma, que sería la denotación, la imagen real proyectada mediante el lente en el interior del telescopio, que sería el sentido, y finalmente la imagen en la retina del observador, que sería su representación de la luna.[222] Por ende, el sentido no pertenece a ningún observador en particular, sino que puede "servir a varios observadores".[223]

En el caso particular de una oración asertiva completa, Frege nos dice que ella contiene un pensamiento.[224] La pregunta que Frege se hace es entonces si dicho pensamiento es el sentido, o si es, por el contrario, la denotación de una tal oración. Frege acude entonces a su argumento de sustituibilidad, a saber, nos dice que si en la oración asertiva en cuestión se reemplaza una palabra con otra que tenga la misma denotación pero distinto sentido, la denotación de la oración completa permanece inalterada. Pero el pensamiento de la oración completa sí cambia,

---

[221]*KS*, p. 145.
[222]Ibid.
[223]Ibid.
[224]*KS*, p. 148.

> [...] pues el pensamiento de la oración "el lucero de la mañana es un cuerpo iluminado por el sol" es distinto del de la oración "el lucero de la tarde es un cuerpo iluminado por el sol". Alguien que no supiera que el lucero de la tarde es el lucero de la mañana podría sostener que uno de los pensamientos es verdadero y que el otro es falso.[225]

Por ende, según Frege, dicho pensamiento no puede ser la denotación de la oración y es en cambio su sentido. Hay que señalar, sin embargo, que se ha demostrado que la sustituibilidad *salva veritate* de un nombre para un objeto por otro nombre con el mismo objeto como denotación depende del tipo de oración en cuestión. Por ejemplo, Quine ha llamado a oraciones que no tienen dicha propiedad "contextos referencialmente opacos".[226] No obstante, es claro que el principio de sustituibilidad para expresiones puramente aritméticas es válido.

Por otro lado, Frege basa en este principio la justificación de su tesis de que la denotación de una oración asertiva es un valor veritativo.[227] Se ha demostrado, sin embargo, que el valor veritativo no es lo único que permanece invariable, y por ende no se puede concluir que la denotación de la oración completa tenga que ser su valor veritativo.[228] Si dicha tesis es correcta, dice Frege, entonces todas las oraciones verdaderas tienen una misma denotación, lo verdadero, y todas las falsas tienen una misma denotación, lo falso.[229]

---

[225]Ibid.
[226]Quine (1980), pp. 139-159.
[227]*KS*, p. 150.
[228]Rosado Haddock (1982), pp. 431-432.
[229]*KS*, p. 150.

Por lo tanto, para Frege las oraciones asertivas completas son nombres propios, y como tales deben tener un sentido y una denotación. Su sentido es un pensamiento y su denotación es un valor veritativo. En este caso la conexión entre sentido y denotación tampoco debe ser arbitraria. Pues Frege nos dice que los pensamientos no son arbitrariamente verdaderos o falsos. Mas bien, ellos son verdaderos o falsos independientemente de que se les reconozca como tales.[230] Sin embargo, no encontramos que Frege utilice el argumento del valor cognoscitivo en el caso de las oraciones asertivas completas, aún cuando las considera nombres propios que denotan un valor veritativo. Se podría de tal manera justificar la diferencia en el valor cognoscitivo de distintas oraciones que tengan una misma denotación. Lo cual en el caso de Frege, equivaldría a justificar las diferencias entre el valor cognoscitivo entre oraciones verdaderas, y entre oraciones falsas. Dichas diferencias serían pues distintos modos de darse lo verdadero o lo falso. Pero Frege no utiliza este camino para aclarar lo que son los sentidos de las oraciones asertivas.

En la §32 de *GgA*, Frege trata de aclarar más precisamente el sentido de una oración asertiva completa, es decir, de un enunciado. Allí nos dice nuevamente que el sentido de todo nombre de un valor veritativo consiste en un pensamiento. Entonces, puesto que en las definiciones de las funciones han sido aclaradas las condiciones bajo las cuales el valor de las mismas es lo verdadero,

> El sentido de un nombre [de un valor veritativo],
> [es decir], el pensamiento es [la proposición de que]
> que dichas condiciones sean satisfechas.[231]

[230] *GgA* XV-XVI; Ver también *GlA* , VI.
[231] Ibid., §32, p. 50.

Pero Frege no desarrolla dicha concepción fuera de dicha sección en *GgA*.

Finalmente, en el caso de las expresiones para funciones, Frege nos dice en su artículo inédito "Comentarios sobre sentido y denotación", —en el cual nos habla propiamente de palabras de concepto, las cuales ya había considerado casos particulares de expresiones para funciones en su artículo "Función y concepto"—, que deben tener siempre un sentido y una denotación al considerárseles en sí mismas, tal como todos los nombres para objetos.[232] Según Frege, la denotación de una expresión funcional es la función misma cuando ella es usada propiamente.[233] Frege no tarda, sin embargo, en encontrar dificultades con dicha concepción.

Si bien, mediante el argumento de sustituibilidad, se demostraba que la denotación de una oración asertiva es un valor veritativo, puesto que dicho valor veritativo de una tal oración permanece invariable cuando se reemplaza en dicha oración un nombre que denote un objeto por otro con la misma denotación, este mismo argumento, utilizado de manera inversa, parece demostrar que la denotación de una palabra funcional lo es un curso de valores y no una función. Nos dice el propio Frege, que:

> [...] en cualquier oración se pueden reemplazar las palabras de concepto, *salva veritate*, siempre y cuando [las palabras reemplazadas] tengan una misma extensión conceptual. [...] Tal como los nombres propios del mismo objeto se pueden reemplazar mutuamente dejando a salvo la verdad, así también puede hacerse con las palabras de concepto si su extensión conceptual es la misma.[234]

[232] *NS*, p. 128; Ver también la carta de Frege a Husserl del 24 de mayo de 1891 en *WB*, pp. 94-98.
[233] Ibid. 78
[234] Ibid. 78

Por ende, como las extensiones de concepto son cursos de valores de ciertas funciones,[235] dicho argumento demostraría que las denotaciones de expresiones para funciones son cursos de valores.

Frege rechaza de inmediato dicha conclusión, diciendo primero que esto contradice su premisa de que las extensiones de concepto son objetos, y que por ende ellas son denotaciones de expresiones saturadas. Esta premisa, sin embargo, se basa en el simple hecho de que las expresiones que Frege introduce para denotar cursos de valores —y por ende las extensiones de conceptos— son saturadas.[236] En segundo lugar, la rechaza diciendo que si la denotación de una palabra conceptual fuera una extensión de concepto, entonces las palabras de concepto que signifiquen conceptos vacíos, es decir, conceptos bajo los cuales no caiga ningún objeto, carecerían de denotación.[237] Pero como vimos, Frege exige que tanto los nombres para objetos como los nombres para funciones tengan siempre tanto sentido como denotación.

Por otro lado, Frege tampoco hace uso, en el caso de las expresiones para funciones, del argumento del valor cognoscitivo que utilizó para justificar la introducción de la noción del sentido de un nombre para objetos. Frege en ningún momento nos ofrece un ejemplo de dos expresiones distintas que tengan una y la misma función como denotación, lo cual vimos más arriba sí hace para demostrar la necesidad de la introducción de los sentidos de los nombres para objetos.[238] Tan sólo nos ofrece repetidas veces ejemplos de dos funciones que tienen un mismo curso de valores, lo cual se da siempre y cuando las funciones en cuestión tengan los mismos valores

---

[235]*KS*, p. 133.
[236]*KS*, p. 135.
[237]*NS*, p. 135.
[238]Según Frege, no se pueden igualar funciones como se hace con objetos. Es decir, que su interpretación de "Sobre sentido y denotación" para los enunciados de identidad vale para expresiones para objetos pero no para expresiones funcionales. La mutua subordinación entre conceptos es similar a la identidad entre objetos, pero no son una y la misma relación. *NS*, pp. 130-132.

para cada argumento.[239] Nos parece que podría haber argüido que, por ejemplo, la verdad del enunciado de identidad "$x^2 + 4x = x\ (x + 4)$" indica que las expresiones "$x^2 + 4x$" y "$x\ (x + 4)$" denotan una y la misma función, y que el valor cognoscitivo que ciertamente tiene dicha identificación responde a que cada expresión funcional tiene un sentido distinto. Frege sin embargo, trata a dichas expresiones funcionales como denotando dos distintas funciones, lo cual, por ejemplo, contradice el principio de sustituibilidad *salva veritate* de expresiones con la misma denotación, pues ellas son ciertamente intercambiables *salva veritate* en cualquier expresión aritmética.

Frege prefiere decir que el enunciado "$x^2 + 4x = x\ (x + 4)$" no es propiamente un enunciado de identidad, puesto que entre funciones no cabe ni siquiera hablar de identidad. La identidad se da propiamente entre objetos. Entre funciones se da una suerte de relación similar que corresponde a la identidad entre objetos, pero que no debe ser confundida con ella.[240] Según Frege, puesto que las funciones, y por ende también los conceptos y relaciones, tienen al menos un lugar vacío que debe ser llenado de alguna manera, por lo tanto:

> [...] a un lado de un signo de igualdad o de un signo similar jamás puede ponerse la mera designación de un concepto [o en general, de cualquier función], sino que además del concepto debe ser designado o aludido un objeto.[241]

La denotación de una palabra para función es discutida en *GgA* en la §29. Pero en dicho pasaje solamente se discute cómo determinar si una palabra para función tiene o no denotación, sin decirnos explícitamente cuál

239 *KS*, p. 130; *NS*, p. 132.
240 *NS*, p. 132.
241 *NS*, p. 131.

es dicha denotación. Por ejemplo, Frege dice que, en el caso de un nombre para una función de primer orden de un argumento, éste:

> tiene una denotación (denota algo, es denotativo [*bedeutungsvoll*]), cuando tenga una denotación el nombre propio que se origina a partir de dicho nombre de función mediante la colocación de un nombre propio en los lugares de argumento, siempre que este último tenga una denotación.[242]

Resulta evidente, que Frege no nos dice aquí cuál es la denotación de un nombre para función, y en general, en *GgA*, no desarrolla este tema.

§14 El principio de completud para las definiciones

En las §§56-67 del segundo volumen de *GgA*, Frege discute su principio de completud para las definiciones. El mismo reza como sigue:

> La definición de un concepto (un predicado posible) debe ser completa (*vollständig*), ella debe determinar unívocamente para cada objeto si éste cae o no bajo el concepto (si el predicado puede ser expresado de él con verdad).[243]

Este principio es aplicado por Frege, como él mismo advierte,[244] en el caso de las definiciones de las funciones veritativas primitivas que ofrece en el primer volumen de *GgA*, las cuales no son ofrecidas en el lenguaje objeto,[245] y que según Frege no son propiamente definiciones sino una suerte de

[242] *GgA*, §29, p. 45-46.
[243] Ibid., ii, §56, p. 69.
[244] Ibid., Nota en ii, §65, p. 78.
[245] Ibid., §§5-13; *BS*, §§1-12.

estipulaciones.[246] Así pues, las conectivas veritativas de su lenguaje lógico, que para Frege son conceptos, puesto que siempre tienen como valor un valor veritativo, son definidas para todos los objetos como argumentos. Como hemos visto, esto implica que sean definidas para números, valores veritativos, y cursos de valores, así como para cualquier otro objeto sensible o no. Esto se diferencia claramente de su práctica definitoria en *BS*, en donde había definido las mismas funciones veritativas sólo considerando a los contenidos enjuiciables como argumentos.[247]

La primera función veritativa, el trazo horizontal "—ξ" —llamado en *BS* el trazo del contenido—, es definida pues para todo objeto como argumento. Frege la define en la §5 de *GgA*, estipulando que ella tendrá el valor de lo verdadero para lo verdadero como argumento, y que tendrá el valor de lo falso para cualquier otro argumento.[248] Para lo verdadero como argumento, e.g., "$2^2 = 4$", tendrá lo verdadero como valor, por ende el valor de "—$2^2 = 4$" es lo verdadero.[249] Para lo falso como argumento, e.g., "$2^2 = 5$", tendrá lo falso como valor, por ende el valor de "—$2^2 = 5$" es lo falso.[250] Para cualquier otro objeto como argumento, como, e.g., "2", tendrá también lo falso como valor, por ende el valor de "—2" es lo falso.[251] Como se ve, Frege no limita el dominio de los argumentos a la hora de definir dicha función veritativa. Puesto que su valor es siempre un valor de verdad, independientemente del objeto que se tome como argumento, ella es un concepto. Y en virtud de las tres estipulaciones que da Frege, éste es un concepto definido completamente. Podríamos llamarlo el concepto de lo verdadero, puesto que por definición, bajo éste cae solamente lo verdadero.

---

[246] Ibid., Nota en p. 148.
[247] *BS*, §§5-13.
[248] *GgA*, §5.
[249] Ibid.
[250] Ibid.
[251] Ibid.

La próxima conectiva que Frege introduce puede ser llamada el concepto de lo no verdadero, pues ella es un concepto que tiene como valor lo verdadero solamente cuando no tiene a lo verdadero como argumento. Es decir que para lo falso como argumento y para cualquier otro objeto como argumento con la única excepción de lo verdadero, ella tiene lo verdadero como valor. Solamente tiene lo falso como valor para lo verdadero como argumento. Es pues la función inversa de la anterior. Como en el caso del concepto de lo verdadero, el concepto de lo no verdadero es definido para todo objeto como argumento, sea éste valor veritativo o no. Su signo es llamado por Frege el trazo de la negación. El mismo consiste de la adición de un pequeño trazo vertical descendiente a partir del punto medio de un trazo horizontal.

La relación de identidad "$\xi = \zeta$" es definida por Frege diciendo que ella tiene el valor de verdadero solamente en el caso de que tenga como argumentos a uno y el mismo objeto. En todos los demás casos tiene el valor de lo falso.[252] Es importante aquí señalar, que esta definición utiliza como criterio solamente los argumentos mismos, es decir, los objetos denotados por los nombres que sean colocados en los lugares de argumento. Por ende, ella comprende tanto las identidades triviales, en donde tanto el sentido como la denotación de los nombres a cada lado del signo "=" sean iguales, como las identidades no triviales, en donde dichos nombres tengan una misma denotación pero un distinto sentido. Como veremos, Frege entiende que sus definiciones en el lenguaje objeto son identidades triviales, en donde tanto el sentido como la denotación de dos signos son idénticos.

[252]Ibid., §7, p. 11.

Frege define la función de universalidad o generalidad, llamada desde Peirce el cuantificador universal.[253] Frege la considera una función de segundo nivel u orden, puesto que toma siempre a una función y no a un objeto como argumento.[254] Sin embargo, el principio de completud es observado por Frege también en su definición. Frege define la función "Para todo a, $\Phi(a)$", en donde el lugar de argumento es demarcado por la variable para funciones $\Phi(a)$, estipulando que ella tenga el valor de lo verdadero si y sólo si el valor de la función argumento $\Phi(a)$ es lo verdadero para todo objeto como argumento de esta última. En caso contrario, el valor de "Para todo a, $\Phi(a)$" será lo falso.

De esta manera, Frege en *GgA*, a diferencia de *BS*, define sus conectivas lógicas, entendidas como funciones veritativas o, más precisamente, funciones cuyos valores son siempre un valor de verdad y por ende conceptos, para todos los objetos como argumentos. La única restricción para las funciones de primer orden en *GgA* es pues que tomen como argumentos sólo a objetos, y que esté determinado su valor para todo objeto como argumento.

Pero esta completud en el dominio de los objetos que pueden servir como argumento de las mismas, encuentra dificultades tan pronto se consideran los cursos de valores como argumentos. Estos, puesto que sus expresiones son saturadas, son considerados objetos por Frege. En particular, como las extensiones de conceptos son los cursos de valores de aquellas funciones que siempre tienen como valor un valor veritativo, dicha interpretación enfrenta graves problemas al tomar extensiones de conceptos como argumentos. Si estas últimas son objetos, entonces por el principio de

---

[253]Kneale (1962), pp. 430, 486.
[254]*KS*, p. 140.

completud, para todo concepto tiene que estar determinado si cualquier extensión de concepto cae o no bajo el mismo, incluyendo la extensión de dicho concepto mismo.

Para desgracia de Frege, dado lo anterior, se puede formular en el lenguaje lógico de *GgA* una fórmula bien formada a partir de la cual se puede derivar una contradicción, específicamente la llamada paradoja de Russell, y por lo tanto dicho sistema de Frege es inconsistente. Esto fue anticipado a Frege por Russell en una carta que le enviara este último con fecha del 16 de junio de 1902, poco antes de que Frege publicara en 1903 el segundo volumen de *GgA*.[255] En un apéndice a dicho volumen, Frege reconoció la inconsistencia que padecía su sistema lógico, ofreció su interpretación de dicha inconsistencia, e intentó elaborar una corrección.[256] Pero la misma fue hallada a su vez inconsistente.[257] Frege por su parte se mostró insatisfecho con los resultados de su proyecto logicista y nunca publicó un tercer volumen de *GgA*, el cual había pensado hacer. Habría que formular un sistema lógico de una manera más adecuada para entonces volver a retomar el proyecto logicista para la aritmética. A la misma vez, si bien, como lo ha expresado Hao Wang,[258] para Frege la teoría de conjuntos era concebida como parte de la lógica, puesto que la lógica fregeana pretende tratar de los conceptos y sus extensiones en el sentido más general, no debe extrañar que dicha inconsistencia afectase también el desarrollo de la teoría de conjuntos por parte de Cantor y Zermelo.[259] De hecho, la misma paradoja en cuestión había sido descubierta por Zermelo independientemente de Russell.

[255] *WB*, pp. 211-212.
[256] *GgA*, pp. 253-265.
[257] Ver Quine (1955), en Sluga (1993), pp. 71-85.
[258] Wang (1994), p. 269.
[259] Kneale (1962), pp. 652.

La paradoja que Russell comunicó a Frege puede ser derivada en el sistema de *GgA* por la siguiente razón. Si las extensiones de conceptos, es decir, si las llamadas también clases son objetos, entonces las funciones tienen que estar definidas para las clases como argumento (§10 *GgA*). Pues de toda función hay que preguntar por su valor para cualquier curso de valores como argumento, incluyendo el suyo propio. Por ende, para todo concepto tenemos que fijar para todo objeto si éste cae o no bajo el mismo, y puesto que las extensiones de conceptos son objetos, hay que preguntar para cualquier extensión de concepto si ésta cae o no bajo el mismo, incluyendo la suya propia. Entonces podemos distinguir entre un concepto cuya extensión caiga bajo el mismo, como '—ξ' (pues por el principio que Frege llama la amalgamación de los horizontales, '—ξ' equivale a '— —ξ') y un concepto cuya extensión no caiga bajo el mismo, como, e.g., la clase de los hombres.[260] La contradicción surge entonces el considerar al concepto de una clase que no pertenezca a sí misma.[261] La extensión de este concepto, si podemos hablar de su extensión, es la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas.[262] La pregunta es si esta última clase pertenece o no a sí misma.[263] De cualquier respuesta se sigue su contraria.

Para evitar esta inconsistencia, Frege plantea primero que el restringir el uso de clases o extensiones como argumentos de funciones de primer orden, sería como restringir la aplicación a las mismas del principio del tercero excluido, el cual según él debe valer para todos los conceptos y relaciones. Si el mismo no vale en el caso de las clases, entonces estas no serían propiamente objetos.[264] Pues por el principio de completud, toda

---

[260] *GgA*, ii, p. 253.
[261] Ibid.
[262] Ibid.
[263] Ibid.
[264] Ibid.

función debe estar definida para todo objeto como argumento, incluyendo, por supuesto, los cursos de valores y las extensiones de conceptos.

Por otro lado, la adopción del principio de completud en las definiciones de funciones y en la subsiguiente aplicación de sus funciones veritativas primitivas y derivadas, sin duda fue un impedimento para que Frege interpretara su sistema lógico a la manera de la teoría de modelos.

También hay que señalar que Frege entendía que el principio de completud debía ser aplicado a la hora de definir las funciones típicamente aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación, la potencia, etc. Así pues, según él, debía estar determinado el valor para una función binaria como "$\xi + \zeta$" o "$\xi < \zeta$" para todo objeto como argumento, sea éste un número o no. Si se limitase el dominio de los objetos que pueden ser argumentos de dichas funciones, entonces obtendríamos pseudorelaciones y no las relaciones propiamente de la lógica, las cuales deben estar precisamente delimitadas. Por otro lado, la aplicación misma de las leyes de la lógica presupone que las funciones, ora conceptos ora relaciones, estén bien delimitadas.[265]

Frege sostiene que si los conceptos y las relaciones no están completamente definidos, entonces los teoremas derivados quedan con una cierta incertidumbre.[266] Por ejemplo, si la suma no está definida para todo objeto como argumento, no podemos saber con certeza cuántas soluciones tiene la función "$x + x = 1$".[267] Según Frege, la función de la suma debe estar definida para todo objeto como argumento. Debe pues tener denotación una frase como "la suma de la luna y la luna", y de esta manera tendría un valor veritativo el enunciado "la suma de la luna y la luna es uno".[268] Como hemos señalado antes, Frege considera que todos los enunciados de su sistema deben

[265]Ibid., ii, §§62, 65.
[266]Ibid., ii, §61.
[267]Ibid., ii, §65.
[268]Ibid., ii, §64.

tener denotación, es decir deben denotar lo verdadero o lo falso. De lo contrario, serían semejantes a las oraciones como "Odiseo fue desembarcado en Itaca mientras dormía profundamente"[269] y "Scylla tenía seis cuellos de dragón",[270] las cuales no pertenecen a la ciencia, pues ni "Odiseo" ni "Scylla" tienen denotación, y por lo tanto los enunciados completos correspondientes tampoco.

Frege señala también, que no es posible restringir el dominio de los argumentos mediante estipulación. Suponiendo que estuviese definido apropiadamente el concepto de número, mediante lo cual se pueda decidir si un objeto dado cae o no bajo el mismo, entonces se podría sugerir una definición como "Si a y b son números, entonces a + b significa ...", llamada por Frege una definición condicional.[271]

En la §65, Frege nos dice que de su principio de completud para las definiciones se deriva el principio de referencialidad para los nombres de funciones, según el cual todo nombre de función debe tener una denotación.[272] Como vimos anteriormente, en la §28 del primer volumen de *GgA*, Frege había dicho que un nombre de función tenía denotación siempre y cuando tenga denotación el nombre propio que se origina mediante la colocación de nombres propios denotativos en cada uno de los lugares de argumentos. Por ende, puesto que no hay restricción para el tipo de nombre propio que puede ocupar cada lugar de argumento, que no sea la de que los lugares emparentados, sean ocupados por los mismos nombres propios, si un nombre de función tiene denotación, dicha denotación lo es una función definida para todo objeto como argumento.

[269]"*KS*, p. 148
[270]*GgA*, ii, §64.
[271]Ibid., ii, §65.
[272]Ibid., ii, §65.

En otro escrito, Frege sostiene que el principio de completud es necesario para evitar la falacia conocida como "Sorites", conocida también como el sofisma del montón, el cual se basa en el uso de los términos con imprecisión, y en especial en el uso de conceptos que no están bien delimitados.[273]

§15 El principio de referencialidad de los nombres

Para las definiciones dadas en el lenguaje objeto introducidas mediante el doble trazo de definición, Frege ofrece en la §28 de *GgA* una regla que llamaremos el principio de referencialidad. Nos dice:

> Para las definiciones, establezco ahora el siguiente principio supremo (*oberste*): Nombres correctamente construidos deben siempre denotar algo.[274]

En dicha sección, Frege nos aclara que llama nombres correctamente construidos a aquellos que consisten de signos ya sea primitivos o introducidos por medio de definiciones.[275] De manera que según este principio, los nombres de funciones veritativas primitivas deben siempre "denotar algo". Frege, sin embargo, no caracteriza en GgA lo que denotan los nombres de funciones, y de inmediato salta a ofrecer la manera de determinar si un nombre dado denota algo, ya sea éste un nombre propio o un nombre de función.

En la §29, Frege nos da dichas condiciones. En virtud de ellas, Dummett sostiene que Frege utiliza en *GgA* lo que dicho estudioso llama "el principio

[273]*NS*, p. 168.
[274]*GgA*, §28, p. 45.
[275]Ibid.

"formas vacías de la lógica",[82] aún cuando sostenía que ellas son reducibles a proposiciones de la lógica.

Frege hace énfasis en la distinción entre un símbolo matemático y su contenido. Nos dice que no se puede esperar "algo con sentido" a partir de operaciones con "símbolos vacíos."[83] En particular, nos parece contundente el señalamiento que Frege repetirá varias veces a lo largo de sus obras de que las propiedades atribuidas a los números no se les pueden atribuir también a los signos numéricos. Por ejemplo, la propiedad de permanecer sin cambio alguno al multiplicarse consigo mismo, se le debe atribuir al significado del símbolo "1", pero ciertamente no al símbolo mismo, cuyas propiedades espaciales y físicas no son por su parte atribuibles a dicho significado.[84] Los símbolos son un recurso mediante el cual se puede manejar un contenido que no es sensible, puesto que mediante su uso se hace dicho contenido "tangible".[85] Y acerca de los símbolos mismos, la aritmética no pretende decir nada,[86] puesto que la conexión entre un símbolo y lo simbolizado por él es enteramente arbitraria.[87] Schröder, por su parte, comete el error de definir el numeral en vez del número,[88] y Stricker asocia con la palabra "cien" meramente el símbolo 100.[89]

§7 Criterios ontológicos

Sin ánimo de menospreciar la tarea filosófica, cierto es que en general los filósofos se distinguen por hacer distinciones que otros no hacen, afinando

---

[82]Ibid.
[83]Ibid.
[84]Ibid., II. También, p.e., en *KS*, p. 127.
[85]Ibid.
[86]Ibid. §24, p. 32.
[87]Ibid. §§16, 24.
[88]Ibid. §43, p. 55.
[89]Ibid. VI.

la comprensión de su objeto de estudio pero sobrecargando sus ontologías con más entidades. Frege, cuya filosofía se distingue por un admirable rigor y uniformidad en el uso de la terminología, no por esto deja de contribuir a dicha sobrepoblación. Introduce las nociones de concepto (*Begriff*) y objeto (*Gegenstand*) como entidades objetivas que deben ser distinguidas tajantemente unas de las otras, según el tercer principio metodológico de *GlA*.[90] Debemos entender a partir del primer y tercer principio, que Frege asocia lo psicológico con lo subjetivo, y lo lógico con lo objetivo, y que por ende tanto los conceptos como los objetos pertenecen al ámbito de lo objetivo y se pueden distinguir claramente entre sí. Frege, al hacer uso de estas nociones en su introducción y a lo largo de *GlA*, presupone una comprensión de las mismas para el estudio riguroso de lo que es un número que realiza en su obra, y es precisamente en términos de ellas que se ofrecerán las definiciones de los números.

Debe ser aclarada la peculiar concepción fregeana del ámbito objetivo, la cual posteriormente será elaborada en diversos escritos. Frege dedica su largo parágrafo §26 de *GlA* para exponer qué es lo que entiende por objetivo. Ofrece varios ejemplos. Lo objetivo es independiente de nuestras representaciones (*Vorstellungen*). Podríamos designar arbitrariamente un cuerpo de agua distinto para llamarse Mar del Norte, pero esto de ninguna manera significa que tal nombre se use para referirse a un estado (*Zustand*) o proceso (*Vorgang*) interior de la mente mediante el cual hiciéramos tal cambio. Todo lo contrario, usamos tal nombre para designar algo que es independiente de consideraciones psicológicas. Nos referimos pues a algo objetivo (*etwas Objectives*). De hecho, si en efecto se hiciera tal cambio, no diríamos que lo que antes era verdadero respecto del mar del norte, e.g., que

[90]Ibid. X.

su mayor profundidad es 740 metros, pasa ahora a ser falso, puesto que tal verdad se predica no de la frase 'mar del norte' propiamente, sino de lo que dicha frase en un momento dado significa. Diríamos según Frege, que se estaría reemplazando un contenido (*Inhalt*) verdadero en la oración 'La mayor profundidad del mar del norte es 740 metros' por un contenido falso, sin que se altere la verdad del contenido original. Dicho contenido es por ende objetivo, no depende de nuestra manera de designar.

Lo objetivo es factual (*etwas Thatsächliches*). Tanto el número como el color son objetivos en este sentido. No dependen de nuestra arbitrariedad (*Willkühr*). Pero el color se conoce a través de los sentidos, mientras que no ocurre necesariamente así con el número, puesto que hasta las cosas inmateriales son enumerables. Por lo tanto, hay que distinguir lo objetivo de lo sensible.

Frege trata de resumir su concepción de lo objetivo en el siguiente párrafo:

> Yo distingo lo objetivo de lo tangible (*Handgreiflich*), lo espacial, y lo actual (*Wirklich*). El eje de la tierra y el centro de masa del sistema solar son objetivos, pero no quisiera llamarlos actuales como a la tierra misma. Se le llama frecuentemente al ecuador una línea pensada (*gedachte*), pero sería falso llamarlo una línea imaginada (*erdachte*), pues el ecuador no se origina (*entstanden*) por medio del pensamiento, producto de un proceso del alma, sino que es reconocido (*erkennen*) y aprehendido (*ergreiffen*). Si el ser reconocido fuese un origen, entonces no podríamos

> expresar nada positivo en el caso de un tiempo anterior a su ostensivo (*vorgeblichen*) surgimiento.[91]

Claramente, el eje de la tierra y más aún el centro de masa del sistema solar están lejos de ser entidades sensibles, sin embargo tampoco son creaciones de la mente como la tradicional dicotomía de la epistemología nos haría creer. Son reconocidas pero no creadas por la mente, puesto que no pertenecen a ninguna intuición particular, y son una y la misma para todas las mentes. De la misma manera es deseable que los números sean los mismos para todos para evitar que la aritmética se convierta en un caos, tal como Frege nos dice en varios pasajes.[92] Según Frege, los axiomas de la geometría son los mismos para todos y en este sentido son objetivos. Frege nos ofrece un ejemplo tomado de la geometría proyectiva en donde, aun cuando dos personas pueden asociar diferentes intuiciones con una palabra como "punto", no obstante reconocerían los mismos axiomas geométricos, por lo tanto podemos entender que asocian algo objetivo también con dicha palabra.

La palabra "blanco" también tiene un sentido objetivo (*objectiver Sinn*), a pesar de que la sensación que nos recuerda puede ser enteramente subjetiva. Decimos que la nieve es blanca, aun cuando esto depende de si podemos ver, de si ella está expuesta a la luz, de si dicha luz no es roja o amarilla, etc. No nos referimos pues a las sensaciones que podamos tener de la nieve, sino a una cierta cualidad objetiva (*objective Beschaffenheit*) que tal sustancia posee

> independientemente de nuestras sensaciones, intuiciones, y representaciones; y de construcciones

[91] Ibid. §26, p. 35.
[92] E.g., en *GlA* §38, p. 49.

> de imágenes interiores a partir de sensaciones anteriores recordadas, pero no independientes de la razón...[93]

Lo objetivo es pues independiente de todo lo que sea particular al que percibe. Inclusive el color blanco tendría un tal sentido objetivo para una persona ciega que no pueda por esto tener una sensación visual del mismo, puesto que lo distingue de otros colores, ya sea porque otros hacen la distinción o porque ha hecho algún experimento.[94] En este caso, diríamos, que la misma propiedad objetiva que hace que una cosa refleje la luz de una determinada manera, puede ser identificada por otros medios que no tengan que ver directamente con la sensación de tal reflexión.

Como ya hemos dicho, lo objetivo es igual para todos. Por otro lado, las ideas o representaciones (*Vorstellungen*) son privadas. Por lo tanto, los números no son representaciones o ideas, puesto que en tal caso sería distinto cada número para cada persona, haciendo inútil cualquier fundamento que no sea uno psicológico para la aritmética. El número dos es uno y el mismo para todos, y es deseable que así sea, puesto que de otra manera no podríamos calcular con certeza el resultado de 2+2 sin especificar a qué persona pertenece la particular representación del dos a la que nos referimos.[95]

En una extensa nota al calce[96] nos dice Frege que se podría adoptar una terminología que distinga entre representaciones subjetivas y representaciones objetivas. Pero como será su práctica en obras posteriores, prefiere utilizar la palabra representación o idea (*Vorstellung*) solamente en su sentido subjetivo. Y en lo que nos concierne en esta sección, nos dice que

---

[93]Ibid. §26, p.36.
[94]Ibid.
[95]Ibid. §27, p.37.
[96]Ibid.

dichas "representaciones objetivas" podrían dividirse en objetos y conceptos. Son pues objetivos en el sentido peculiar de Frege, tanto los objetos como los conceptos. Cuando Frege habla de un concepto, no se refiere a algo subjetivo como quizás se podría esperar. Tanto los conceptos como las relaciones entre ellos, como la de subordinación, son objetivos.[97] Los conceptos, si bien pueden ser obtenidos también mediante abstracciones a partir de lo sensiblemente dado, no son únicamente obtenidos de tal manera.[98] Por otro lado, cuando habla de un objeto, no se refiere necesariamente a algo sensible, puesto que, como hemos dicho, lo objetivo no se reduce a lo sensible. No todos los objetos son espaciales, ni todos ocupan un lugar. Nos dice:

> Una determinación del lugar del número 4 no tiene sentido; pero a partir de esto se sigue solamente que dicho número no es un objeto espacial, y no que no es un objeto de ninguna manera. No todo objeto está en algún lugar.[99]

De igual manera, tanto los conceptos como los objetos que interesan a Frege en la presente obra, además de ni ser subjetivos ni ser sensibles, son iguales para todos e independientes de toda sensación, intuición, o cualquier construcción mental particular. Por ende, son independientes de nuestra arbitrariedad. No son ni tangibles, ni espaciales, ni actuales. Son reconocidos o descubiertos por la mente pero no son creados por ella.

Una vez presentados los conceptos y los objetos como objetivos, resta mostrar cómo se puede distinguir entre ambos tal como exige el tercer principio metodológico de *GlA*, según el cual hay que tener siempre presente la distinción entre concepto y objeto. Si ambos son objetivos en la manera

---

[97] Ibid. §47, p. 60.
[98] Ibid. §49, p.62.
[99] Ibid. §61, p. 72.

arriba descrita, no se puede recurrir ni a la subjetividad, ni a la sensibilidad para hacer dicha distinción. Debe haber una diferencia esencial. Precisamente este tema será objeto posterior de la atención exclusiva de Frege en una conocida serie de artículos escritos luego de *GlA* pero antes de su próximo libro, *Grundgesetze der Arithmetik* (I:1893; II:1903), en lo sucesivo *GgA*. No encontramos que elabore en *GlA*, sin embargo, criterios esenciales para distinguirlos como el de saturación[100] — que posteriormente elaborará —, pero sí se menciona el de la necesidad de completud de los conceptos y las relaciones.[101] No obstante, Frege contrasta y describe ambas entidades de diversas maneras.

En la terminología que Frege utilizará a lo largo de toda su obra, varios objetos se relacionan con un concepto diciendo si ellos *caen* o no *bajo* dicho concepto. Los objetos son descritos como singulares o individuales (*einzeln)* a diferencia del concepto bajo el cual caen.[102] Ellos no ocurren más de una vez, sino que varios ocurren bajo un mismo concepto. Pero Frege distingue el concepto del objeto aun en el caso de que sólo un objeto caiga bajo un determinado concepto, e.g., 'satélite natural de la tierra'.[103] En tal caso, tanto el objeto como el concepto son individuales, y ocurren sólo una vez. El criterio de singularidad, si se entiende que un concepto bajo el cual cae más de un objeto no debe ser descrito como singular, no basta pues para distinguir a un concepto de un objeto.

Frege describe a los objetos como determinados (*bestimmt)* y con propiedades innatas (*angebbaren)* como en el caso del número uno el permanecer sin cambio cuando se le multiplica por sí mismo.[104] Pero más

[100]Que menciona, sin embargo, en una carta de 1882.
[101]*GlA*, §70, p. 82.
[102]Ibid. §37, p. 48.
[103]Ibid. §51, p. 63.
[104]Ibid. II.

adelante describe tanto a los objetos como a los conceptos como determinados y fijos (*festig*).[105] Tomando nuevamente a los números como objetos, nos dice que por su naturaleza se encuentran en un orden determinado, y que cada uno está constituido de una propia manera (*eigene Weise*) y tiene su naturaleza propia (*Eigenart*).[106] En el mismo pasaje nos dice que en el caso de los números no estamos en posesión del concepto general bajo el cual caen todos. Los números son justamente (*geradezu*) creados (*geschaffen*) y determinados por el proceso de la adición del uno.[107] Por esta razón, dice Frege, sus propiedades se siguen de sus definiciones.[108] Los números como objetos también se distinguen de los puntos de la geometría. Un punto considerado en sí mismo no puede ser distinguido de ningún otro, no es particular ni especial (*besonder*). Por otro lado, cada número es distinguible de todos los demás. Cada uno tiene su particularidad (*Eigenthümlichkeit*) y su peculiaridad (*Besonderheit*)[109]. Cada número como el cero, el uno, etc., tiene algo especial o peculiar (*etwas Besonderes*)[110].

Para distinguir los objetos de los conceptos, un pasaje revelador en *GlA* se encuentra en la §47.[111] Frege pregunta si la proposición "Todas las ballenas son mamíferos" habla de conceptos o de animales (objetos). No podemos señalar ningún animal que sea el sujeto de dicha predicación. En términos más generales, no es un enunciado que predique alguna propiedad de un objeto determinado. La palabra "ballena" en dicha oración, dice Frege, no designa un ser individual (*Einzelwesen*). Y entonces, ¿De qué tipo de entidad se está predicando? De un concepto, del concepto de ballena, el cual es tan

[105]Ibid. V.
[106]Ibid. §10, p. 15.
[107]Ibid. §10, p. 16.
[108]Ibid.
[109]Ibid. §13, p. 20.
[110]Ibid. §44, p. 57.
[111]Ibid. §47, p. 60.

objetivo como lo son los objetos que puedan caer bajo el mismo. Una aseveración sobre un concepto, dice Frege, contiene algo factual (*etwas Thatsächliches*). Pero Frege va más allá en otro pasaje. Nos dice que cuando hablamos del concepto de triángulo rectángulo, no estamos predicando la propiedad de ser rectángulo precisamente del concepto de triángulo, pues sería tan absurdo hablar de un concepto rectángulo, como hablar de un "concepto azul", o un "juicio salado". Como Frege elaborará en ensayos posteriores, más bien queremos decir que la propiedad de ser rectángulo le pertenece a cada uno de los objetos que puedan caer bajo el concepto de triángulo. De hecho, se podría añadir que ni siquiera tiene tres ángulos el concepto triángulo, sino que esta propiedad le pertenece a cada objeto que caiga bajo dicho concepto. A estas presuntas propiedades de conceptos llama Frege marcas o notas características (*Merkmale*) del mismo. En el caso anterior, tendríamos que decir que la propiedad de ser mamífero se predica de "todos" los objetos que caigan bajo el concepto de ballena, pues igualmente absurdo resultaría intentar concebir un concepto mamífero.

Otro contraste señalado por Frege para distinguir en *GlA* entre concepto y objeto lo es su tesis de que los números son predicados de conceptos y no de objetos. O como lo expresa Frege, "Una expresión de número contiene una aserción sobre un concepto" (*Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriff*).[112] Luego de haber señalado que los números no se predican ni de objetos externos, ni de colecciones o conjuntos de objetos (*Menge*), ni de representaciones subjetivas, Frege sostiene que se predican de entidades objetivas que llama conceptos. Pero no es suficiente esta aclaración para distinguir entre concepto y objeto a menos que no se tenga previamente definido lo que es un número. Y Frege ofrece su definición de

[112]Ibid. §46, p.59. Ver también §48, p. 61-2.

número en un pasaje posterior al que sostiene lo que mencionamos. Decir pues, que los números se predican de conceptos y no de objetos no sirve pues, en ese lugar de la obra, para distinguir los conceptos de los objetos. Más aun, Frege presupone, como hemos dicho arriba, las nociones de concepto y objeto para entender con base en éstas la de número.

Si bien pues, no parecen enteramente satisfactorias las diferencias ofrecidas por Frege para distinguir entre concepto y objeto en *GlA* — lo cual probablemente lo movió a elaborarlas en varios trabajos posteriores —, quedó claro, sin embargo, que ambas nociones son objetivas en el sentido particular con que Frege entendió esta palabra. A dicho ámbito objetivo Frege adscribió un carácter de eternidad y permanencia. "El pensamiento", dice en su introducción — como tres décadas más tarde elaborará[113] —, "es esencialmente el mismo en todas partes."[114] Frege adscribe la verdad a "pensamientos", o como dijo en *BS*, a contenidos enjuiciables, cuya verdad no depende de ningún factor psicológico.[115] Como hemos dicho más arriba, el contenido de una aserción es verdadero o falso independientemente de nuestras representaciones o procesos internos. La verdad no es, según Frege, como diríamos en terminología más moderna, propiedad de las expresiones sino de las proposiciones que ellas expresan, suponiendo que esté implícito todo aquello que haga falta determinar para que una proposición tenga un valor veritativo determinado. Esta concepción de la verdad, según Hintikka, prejuiciará a Frege en contra de Hilbert y también del desarrollo de la teoría de modelos.[116] Por su parte, los conceptos también pueden ser en cierta manera eternos. Nos dice Frege, que el número que pertenece al concepto "habitante

[113] G. Frege, "El pensamiento" (1918).
[114] Ibid. III.
[115] Ibid. §§8, y otras.
[116] Hintikka & Sandu, "Uses and Misuses of Frege's Ideas", pp. 278-281.

de Alemania en Año Viejo 1883, hora de Berlín" es el mismo "para toda la eternidad".[117] Pero en el caso del concepto "habitante de Alemania", éste, nos dice, anticipando ciertamente la posterior definición suya de concepto como un tipo de función, es "una función del tiempo". "Hay algo fluido (*etwas Fliessendes*)", dice, "en un concepto".[118] Pero en el caso de los objetos, nos dice que objetos como el número 1 son siempre el mismo.[119] En este último sentido podemos diferenciar a los conceptos de los objetos según lo expresado en *GlA*, pues en ningún momento se identifica un objeto con una función, y precisamente son las funciones, entendidas en el sentido más general, con quien Frege contrastará los objetos en escritos posteriores a *GlA*. En su artículo "Sobre función y concepto" de 1891, admitirá finalmente que no se puede definir lo que es un objeto y lo que es una función, por lo cual éstas serán las nociones lógicas primitivas a las que se reduce su filosofía de la matemática. Allí dice:

> [...] nos preguntamos ahora qué llamamos aquí objeto. Estimo que de esto es imposible dar una definición escolar pues estamos ante algo que por su simplicidad no admite una división lógica. Solamente se puede señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo se puede afirmar escuetamente: objeto es todo lo que no es función, todo aquello cuya expresión no lleva consigo un lugar vacío.[120]

El ámbito objetivo también puede ser caracterizado desde una perspectiva un tanto epistemológica, como vimos en la cita de la §26. Como

117Ibid. §46, p. 60.
118Ibid.
119Ibid. §38, p. 49.
120*KS*, p. 134.

anuncia Frege en su introducción, pero desgraciadamente sin elaboración posterior, quizás algún lector tendrá que "revisar su teoría del conocimiento."[121] Según Frege, el dictum kantiano de que todo objeto es dado a través de la sensibilidad, es incorrecto, pues ni el cero ni el uno pueden ser dados de esa manera,[122] y en general cualquier número puede sernos dado sin tener que recurrir a la sensibilidad. Frege hace esto claro cuando critica duramente a J. S. Mill, como representativo de una concepción empirista de la aritmética.[123] Para Frege, los números no tienen en sí un origen sensible.

Por otro lado, cuando Frege habla de conceptos o de objetos en *GlA*, no nos habla de pensarlos o imaginarlos, sino de reconocerlos (*erkennen*, *wiedererkennen*).[124] Como veremos más adelante, tal reconocimiento se puede tomar, en el caso de los objetos, como un criterio para la existencia, tal como ha sostenido Jan Dejnozka.[125] Un objeto debe poder ser identificado como uno y el mismo. En el caso de los conceptos, éstos tienen que ser captados por la mente en su "forma pura" con los "ojos del alma".[126] En cuanto a los números, de entrada nos dice que una vez obtenido un concepto por abstracción — podemos obtenerlo también mediante definición, pues de otra manera no se darían conceptos bajo los cuales no caiga ningún objeto —, el número que le corresponde a dicho concepto es "descubierto" (*endeckt)*.[127] No tienen pues los números tampoco un origen subjetivo. Frege, sin embargo, nunca elaboró una epistemología para estas entidades objetivas no sensibles, más alla de ofrecer los criterios para identificarlas que ya hemos mencionado.

---

[121] *GlA* XI.
[122] Ibid. §89, p.101.
[123] Ibid. §§7-9.
[124] Ibid. v, vii, §28, p. 39.
[125] Dejnozka, "Frege: Existence defined as identifiability" (1982).
[126] *GlA* VII.
[127] Ibid. §48, p. 61.

§8 Identidad de objetos y equinumerosidad entre conceptos

En su introducción, en la §62, y en varios pasajes de la quinta parte de *GlA*, titulada "Conclusión", Frege nos dice que su tarea de definir lo que son los números se podrá reducir a fijar el sentido (o contenido) de una identidad (o juicio de reconocimiento).[128] Y de hecho, Frege agrupa en el índice de la obra las §§62-69, que contienen el segundo y el tercer y final intento de definir el concepto de número, bajo un título que dice que para obtener dicho concepto hay que fijar el sentido de una "identidad numérica" (*Zahlengleichung*).[129] Debemos pues darle la importancia sugerida por Frege a esta aseveración y tratar de dilucidar de qué manera él mismo siguió este camino. Pero primero hay que aclarar, que en *GlA*, como hemos dicho más arriba, todavía no se hace la distinción entre sentido y denotación para el contenido de un juicio, la cual fue incluida en *GgA*. A la misma vez, Frege considera las igualdades o ecuaciones de la aritmética (e.g. '1=1', '2+2=4', etc.) como identidades,[130] que a su vez pueden ser consideradas como casos particulares a la matemática de juicios de reconocimiento. Mediante estos últimos debemos, según Frege, poder reconocer a un objeto como uno y el mismo y diferenciarlo de cualquier otro objeto.

En el rechazo de su primer intento de definición de los números de la §55, donde define el cero, el uno, y el sucesor de un número aludiendo a la estrategia que había citado de Leibniz, según la cual cada número se define "en términos de su antecesor",[131] Frege señala que dichas tres definiciones que ha ofrecido no permiten "demostrar" una "identidad numérica", puesto

---

[128]*GlA*, X, §§62, 63, 104, 106, 107, 109, y una nota al calce en p. 72.
[129]Ibid. X, p. 73.
[130]Ibid. §57, p.69.
[131]Ibid. §6, p. 8.

que no han definido al cero y al uno como objetos que sean "reconocibles" y diferenciables.[132] De un modo similar, en el rechazo de su segundo intento de definición de la §65, él nos dice que la definición que ha ofrecido del concepto de dirección, que toma como ejemplo correspondiente al concepto de número, en términos de paralelismo entre dos rectas, correspondería a la "identidad numérica",[133] no es suficiente para establecer en todos los casos la identidad entre dos direcciones, o más exactamente, para reconocer una dirección como uno y el mismo objeto a pesar de que sea posible referirse a ella de distintas maneras.[134]

Luego, para defender la definición de número que finalmente da y acepta en la §68, Frege ofrece una prueba de la adecuación de la misma diciendo que la igualdad entre dos números se da siempre que los conceptos a los que cada uno pertenece sean "equinuméricos", lo cual a su vez quiere decir que existe una relación que hace corresponder biunívocamente a los objetos que caen bajo uno de dichos conceptos con los que caen bajo el otro. Veamos esta justificación con algún detalle. Primero señala que los números y las extensiones de algunos conceptos tienen las mismas condiciones de identidad, pues siempre que dos de tales conceptos tengan la misma extensión tendrán también un mismo número que les pertenezca.[135] Por ende, se puede aceptar la definición de los números en términos de extensiones de algunos conceptos. Y por esta precisa razón rechaza que los números sean conceptos, puesto que dos conceptos distintos pueden tener la misma extensión; y, por supuesto, dos distintos conceptos pueden tener un mismo número de objetos que caigan bajo cada uno de ellos, y por ende los números y los conceptos no

[132]Ibid. §56, p. 68.
[133]Ibid., Nota en §65, p. 76; §68, p. 79.
[134]Ibid. §66, p. 77-8.
[135]Ibid. §69, p.80.

tienen las mismas condiciones de identidad.[136] Luego se equipara la identidad de extensión con la equinumerosidad entre conceptos, la cual no es definida con base en el concepto de número, puesto que se cometería un error de circularidad, sino con base en la relación lógica de correspondencia biunívoca (también llamada en español aplicación biyectiva), equiparando mediante definición el significado de dos expresiones:

> [...] la expresión "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la expresión "existe una relación ϕ, que hace corresponder biunívocamente a los objetos que caen bajo el concepto F con los objetos que caen bajo el concepto G". [137]

Entonces, para justificar dicha última definición, él muestra que siempre que las extensiones de dos conceptos sean una y la misma, es decir, idénticas, también ambos conceptos son equinuméricos y viceversa.[138]

En resumen, para justificar la tercera y final definición del concepto de número, Frege considera la igualdad entre condiciones de identidad de dos entidades como justificación de la definición de una en términos de la otra. Primero, la definición del número que pertenece al concepto F en términos de la extensión de un particular concepto, a saber, la extensión del concepto "equinumérico con el concepto F", es defendida con base en el hecho de que

> la proposición que dice que la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la extensión del concepto "equinumérico al concepto G" es verdadera siempre y cuando sea

[136]Ibid. Nota al calce en p.80.
[137]Ibid. §72, p. 85.
[138]Ibid. §73, pp. 85-6.

> también verdadera la proposición "el número que le pertenece al concepto F es el mismo que le pertenece al concepto G".[139]

Entonces, reconocer mediante una identidad al número que pertenece a un concepto F como uno y el mismo es equivalente a reconocer mediante una identidad que la extensión que pertenece al concepto "equinumérico con dicho concepto F" es una y la misma. Y segundo, la identidad entre las extensiones de los conceptos "equinumérico al concepto F" y "equinumérico al concepto G" se da siempre que se dé la equinumerosidad de los conceptos F y G,[140] lo cual, como hemos citado más arriba se reduce a una relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo el concepto F y los objetos que caen bajo el concepto G. Por ende, reconocer mediante una identidad que la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la extensión del concepto "equinumérico al concepto G" es equivalente a reconocer la existencia de una relación entre los objetos que caen bajo F con los objetos que caen bajo G que sea de correspondencia biunívoca o biyectiva. Y por lo tanto, uniendo lo primero con lo segundo, reconocer mediante una identidad que el número que le corresponde a dos conceptos es uno y el mismo equivale a reconocer una relación lógica entre los objetos que caen bajo dichos conceptos. De esta manera, Frege parece establecer el sentido que buscaba para una igualdad numérica, o más precisamente, define el sentido de la proposición "el número que le pertenece al concepto F es el mismo que el que le pertenece al concepto G",[141] llamada por Dummett la equivalencia original, lejos del alcance de la intuición sensible y dentro del dominio de la lógica. Así se obtiene un "criterio" para la

---

[139]Ibid. §69, p. 80.
[140]Ibid. §73, p. 85.
[141]Ibid. §62, p. 73.

identidad de los números que por tanto permite reconocer un número determinado como uno y el mismo, después de lo cual podemos asignarle un nombre propio.[142] Dummett, en su obra temprana, descartaba la utilización del criterio de identificabilidad en la definición final de Frege por razones que veremos más adelante en la discusión de las definiciones contextuales.

El propósito de Frege no es, sin embargo, simplemente asignar un sentido, preferiblemente en términos lógicos, a las ecuaciones matemáticas que considera identidades, sino, mediante esto, definir el concepto general de número y luego los números particulares. Para este fin, nos trata de aclarar en la §62 y en las §§ siguientes cómo, en vez de pasar de una definición del concepto de número, presuponiendo el concepto general de igualdad, a la igualdad entre los números, elige otro camino, a saber: a partir de la definición de la identidad de los números se obtiene el concepto de número. Frege reconoce que ésta es una estrategia de definir un tanto extraña.[143]

§9 Definiciones contextuales

Como hemos dicho anteriormente, Frege en los *GlA* utiliza el principio del contexto para, según sus palabras, evitar el que se asocie una representación - es decir, una imagen subjetiva - con el significado de los términos numéricos. Esta aseveración se ha tomado por algunos como una normativa que debería exigir el uso de definiciones contextuales para definir cualquier término abstracto, donde por "término abstracto" se entiende cualquier término que no pueda de manera alguna ser definido ostensivamente, como "cero" o "0", los cuales, como hemos dicho, Frege toma como nombres propios de objetos que no son espacio-temporales. Pero,

[142]Ibid.
[143]Ibid. §63, p. 74.

como hemos señalado, Frege mismo no usa la expresión "definición contextual" en sus textos. Usa en los *GlA* indistintamente *Definition* y *Erklärung*.[144]

Generalmente, se ha tomado la definición - del llamado segundo intento de definición - ofrecida en la §65 como contextual, a saber:

> (II)...definición: sea la proposición "la recta a es paralela a la recta b" sinónima de la proposición "la dirección de la recta a es la misma que la dirección de la recta b."[145]

De esta manera se obtiene el concepto de dirección, puesto que, tomando al paralelismo como una relación de igualdad, se introduce el término "dirección" para designar aquello que es común a "la recta a" y a "la recta b." En palabras de Frege, "distribuimos el contenido especial de [la primera proposición] entre a y b."[146] Pero, por supuesto, lo que interesa es el concepto de número y no el de dirección. Para esto, Frege sostiene que por la relación de paralelismo entre rectas podemos tomar de igual modo la de equinumerosidad entre conceptos,[147] y según esto, **II** equivaldría a decir que la proposición "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la proposición "el número que pertenece al concepto F es el mismo que pertenece al concepto G", sinonimia que Dummett llama la "equivalencia original", y que, como ya hemos visto, Frege sostendrá que "hay que demostrar" para justificar la tercera definición (**III**) que finalmente acepta. Nos dice en la §73:

---

[144]Véase entre muchos pasajes, el de la definición que citamos a continuación.
[145]*GlA* §65, p. 76.
[146]Ibid. §64, p. 74-75.
[147]Ibid. Nota en la §65, p. 76.

> (**A**) [debemos demostrar] que el número que le pertenece al concepto F es el mismo que le pertenece al concepto G, [exactamente] cuando el concepto F es equinumérico al concepto G.[148]

Lo cual, puesto que se ha definido anteriormente la frase "el número que corresponde al concepto F" en términos de "la extensión del concepto "equinumérico al concepto F""[149] equivale a demostrar que:

> la extensión del concepto "equinumérico al concepto F" es la misma que la del concepto "equinumérico al concepto G", [exactamente] cuando el concepto F es equinumérico al concepto G.[150]

Frege da esto último por demostrado en la misma §73, y según él, así se justifica su definición sin hacer uso de la intuición.[151]

Podemos ver entonces que Frege no parece haberse desviado esencialmente del camino que emprendió en el citado segundo intento de definición (**II**), si bien parece significativo el hecho de que **II** fue ofrecida como una definición, mientras que **A** se ofrece como una justificación de **III**. Pero, primeramente, no considera necesario dar el significado de lo que es una recta ni de lo que es una extensión de concepto, ni siquiera de las frases "la recta a" o "la extensión del concepto "equinumérico al concepto F"". Si bien, por un lado dice en una nota que se supone que se conoce de antemano lo que es una extensión de concepto,[152] y por otro dice que no le da demasiada importancia

---

[148]Ibid. §73, p. 85.
[149]Ibid. §68, p. 79-80. §72, p. 85.
[150]Ibid. §73, p. 85.
[151]Ibid.
[152]Ibid. §68, p. 80.

a las extensiones de conceptos.[153] Lo cierto es que en *GIA*, él piensa que basta con hallar un sentido para la identidad entre números, que equivale a una identidad entre extensiones de conceptos, y que no hace falta buscar el significado del número que corresponde a un concepto en aislamiento. Como hemos visto, la identidad entre extensiones equivale a la equinumerosidad entre conceptos, lo cual se da si existe una relación lógica de correspondencia biunívoca entre los conceptos en cuestión. Parece suficientemente aclarado para Frege lo que es una extensión de conceptos en el contexto de una identidad entre extensiones, pues se fija el "sentido" de dicha identidad y no propiamente el de una extensión dada.

No empece a lo anterior, los estudiosos de Frege generalmente coinciden en que el segundo intento de definición (**II**) es contextual y el tercero no lo es. Una y otra vez podemos leer que Frege abandonó su estrategia contextual y adoptó una de definición explícita, pues se sostiene que es explícita la definición ofrecida en la §68 y recalcada en la §72 del número que pertenece al concepto F en términos de la extensión del concepto "equinumérico al concepto F". Pero nos debemos preguntar, cómo es explícita la definición de la frase "el número que pertenece al concepto F", si se le define en términos de algo cuyo significado no está establecido, y que a lo sumo se intenta establecer contextualmente. Tan sólo encontramos afín a nuestra interpretación la opinión de J. Dejnozka, que en su artículo "Frege: existence defined as identifiability" llega a la conclusión de que:

> Frege does not give up contextual definition, but rather substitutes one kind of identity definition [(**II**)] for another [(**III**)], upholding the requirement

[153]Ibid. §107, p. 117.

> of an identity criterion for introducing denoting expresions.

Si bien, como hemos visto, Frege parece que intenta definir contextualmente las extensiones de conceptos, tal como en **II** intentó definir contextualmente al número que pertenece a un concepto. Habría que decir que no se pudo pasar directamente de la identidad numérica a la equinumerosidad entre conceptos, y por ende tuvieron que mediar algunas extensiones de conceptos, en términos de las cuales se definieron los números, cuya identidad sí se podía establecer que equivalía a la equinumerosidad entre conceptos.

Por su parte, Dummett sostiene que Frege no rechaza su segundo intento de definición (**II**) por el hecho de ser contextual, pero, sin embargo, escoge una definición explícita en su tercer y final intento (**III**). Es decir que ni utilizó ni rechazó la estrategia contextual en su segundo intento, cuando sí la utilizó en su primero, lo cual nos parece una interpretación que no hace justicia al rigor que exigía Frege de su estudio. Citemos a Dummett:

> [...] it is clear that he does not reject the suggested contextual definition [en la §65] simply because it is a contextual definition. [...] contextual definition is expressly defended in the *Grundlagen*, the example being given [en la §60, nota] with approval, of the definition, in terms of limits, of the standard notation for differentiation.[154]

Y más adelante sostiene que, luego de ser rechazado el segundo intento (**II**):

> Frege's solution was, of course, to give an explicit definition of the functional expresion in terms of classes [extensiones de conceptos]. [...] making it

[154]Dummett, *Frege: Philosophy of Language* (1973, 1981), p. 496.

> more plausible that names of numbers and of directions can be regarded as having reference.[155]

Y en su más reciente obra sobre la filosofía de la matemática de Frege, sostiene la misma posición general:

> [...] the contextual definition [(II)] had a solution, but not a unique one; it therefore had to be replaced by an explicit definition, providing a determinate solution. There is no hint, in the text of *Grundlagen*, that from this any general objection to contextual definitions can be derived, and Frege's remarks in §60 make it very doubtful that he thought so.[156]

Dummett sostiene que, en sentido estricto, el dar un criterio de identidad no equivale a ofrecer una definición contextual, y por lo tanto ni siquiera el segundo intento puede ser considerado como contextual. Pues muestra, que el estipular los criterios de identidad constituye ofrecer definiciones contextuales sólo en el caso de que el lenguaje lógico en cuestión sea multi-sorteado, es decir, que tenga distintos tipos de variables que correspondan a distintos tipos de objetos.[157] Pero, como él mismo señala, tal lenguaje sería inconsistente con la demostración de la infinitud de la serie de los números naturales que ofrece Frege en *GlA*, la cual presupone que los números son objetos que no son físicos ni sensibles, pero que no deben ser distinguidos en tanto objetos de otros objetos que sí sean físicos y sensibles. Por ende, según Dummett, el segundo intento no es estrictamente contextual,

---

[155]Ibid. p. 501.
[156]Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics* (1991), p. 126.
[157]Ibid., p. 131-140.

y por ello se refiere al mismo como la "supuesta definición contextual".[158] Lo cual, nos parece que devalúa el contraste citado arriba entre el segundo y el tercer intento donde se dice que el primero es contextual y el segundo no lo es.

§10 Definición del concepto de número

Debemos aclarar de qué manera Frege define el concepto general de número. La definición del concepto general de número consiste de tres definiciones que se complementan, y que son reunidas en la §72. En dicho pasaje se define explícitamente, en términos de otra expresión, la expresión "n es un número", la cual es una de las maneras de designar el concepto de número. Una expresión que para Frege es más parecida al contenido de dicha frase lo sería "n cae bajo el concepto de número". En ambos casos, el resultado de la sustitución de la variable *n* por un nombre lo es un enunciado con un valor veritativo. Frege dirá efectivamente que los conceptos son funciones de un argumento que "denotan" un valor veritativo cuando su variable es sustituida por un nombre que denote un objeto determinado. Este vínculo entre lo que es un concepto y los valores veritativos que son denotados por el enunciado resultante de una tal sustitución — como "0 es un número" que es verdadera — parece arrojar alguna luz sobre la definición del concepto general de número ofrecida en *GlA*.

La expresión para el concepto de número es definida así:

> [**A**] la expresión "n es un número" es sinónima de la expresión "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde"[159]

---

[158] Ibid., e.g., p. 155.
[159] *GlA* §72, p. 85.

Si definimos con Frege, un concepto en términos de una función cuyo valor es siempre un valor veritativo, entonces la sinonimia que estipula dicha definición sería más bien una equivalencia tautológica, en donde, para los mismos nombres de objetos como argumentos, ambas expresiones denotan el mismo valor veritativo. De esta manera se define una expresión conceptual, para decir así, en términos de otra expresión conceptual, ambas de las cuales contienen una misma variable *n* cuya sustitución apropiada produce un enunciado en cada caso. Si bien, de esta manera se está interpretando laxamente la segunda expresión, ignorando el carácter existencial del enunciado resultante y sólo enfocando el hecho de que se obtiene un valor veritativo al sustituir la variable *n*. Se debe añadir que según sus escritos posteriores, y dado que Frege dice en un pasaje de *GlA* que la existencia es una propiedad de conceptos, la segunda expresión sería interpretada por Frege como un concepto también, pero de segundo orden.

Independientemente de los objetos físicos que existan en el mundo y más aún de los que han sido percibidos sensiblemente, Frege nos ofrece un grupo, por decir así, de conceptos a los cuales corresponden cada uno de los números naturales, pero bajo los cuales no caen objetos físicos ni sensibles. Se asegura así la verdad de la segunda expresión conceptual citada ("hay un concepto ...") para cada uno de los números naturales como argumento, mediante lo cual se asegura la equivalencia tautológica entre ambas expresiones. Para 0, "0 es un número" es un enunciado verdadero — y deseable que lo sea si es que la definición del concepto de número de Frege ha de corresponder intuitivamente al sentido común de lo que son los números — si y sólo si es verdadero que "hay un concepto tal que 0 es el número que le corresponde". Frege nos ofrece el concepto "desigual a sí mismo", puesto que ningún objeto corresponde a dicho concepto, y, por esto, 0 es el número que corresponde a dicho concepto. Por ende, ambas expresiones de la definición citada se convierten en enunciados verdaderos si se sustituye a *n* por "0". La expresión conceptual "desigual a sí mismo" se expresaría más claramente mediante la expresión "*a* cae bajo el concepto 'desigual a sí mismo'", donde *a* es la variable que puede ser sustituida por un nombre de un objeto.[160] Para 1 como argumento, nos ofrece el concepto "igual a 0", puesto que sólo un objeto cae bajo dicho concepto, el 0, y por ende le corresponde al mismo el número 1. Para 2 como argumento, ofrece el concepto "perteneciente a la serie de números naturales que termina con 1",[161] bajo el cual caen el 0 y el 1, y por ende le corresponde el número 2. Continuando de esta manera se ve que hay un concepto para cada uno de los números naturales. Por lo tanto, se asegura la equivalencia entre las dos expresiones citadas.

Pero, ¿cómo se da el paso a partir del saber que no hay ningún objeto que caiga bajo el concepto "desigual a sí mismo", a la declaración de que esto equivale a decir que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto? Y en general, ¿Cómo se pasa de la asociación de unos objetos con un concepto a la asociación de un número con dicho concepto? Según Frege, sorprendentemente, no se da directamente mediante definición, pues esto es precisamente lo que rechaza en la §55, donde dice que:

> Es tentador definir: el número 0 le corresponde a un concepto cuando ningún objeto cae bajo él. Pero aquí parece que se coloca en el lugar de 0 su sinónimo "ningún"; por lo que es preferible la siguiente formulación: el número 0 le corresponde

[160]Ibid. §74, pp. 87-88.
[161]Ibid. §§81, 82, p. 94.

> a un concepto si para todo *a* vale la proposición de que *a* no cae bajo dicho concepto.[162]

Esta definición y las similares para el 1 y (n+1) son rechazadas de inmediato porque:

> [...] no podemos diferenciar mediante nuestras definiciones si el número Julio César le corresponde a algún concepto, [o lo que es lo mismo] si ese conocido conquistador es un número o no.

En efecto, una serie de definiciones de este tipo no serían suficientes para decidir el valor veritativo de "Julio César es un número", y por lo tanto no definen completamente el concepto general de número. Pues se definen las frases "el número 0 corresponde a", "el número 1 corresponde a", etc.,[163] pero esto no es suficiente para definir la frase "el número Julio César corresponde a". Para Frege, además de los números individuales, hay que definir también el concepto de número, es decir, hay que ofrecer la propiedad que es común a todos los números y que hace que todos ellos sean reunibles bajo dicho concepto.

Dicha propiedad tiene que ver directamente con el "sentido de una identidad numérica". Los números se distinguen de otros objetos por la manera de identificarse, por la manera de reconocer a uno de ellos como uno y el mismo. Como hemos discutido más arriba, Frege encuentra que el sentido de una identidad numérica consiste en la relación de correspondencia biunívoca. Haciendo uso de las nociones lógicas de objeto, concepto, y relación, vimos que el sentido de la proposición "el número que corresponde

---

[162]Ibid. §55, p. 67.
[163]Ibid. §55, p. 68.

al concepto F es el mismo que el que le corresponde al concepto G" es, por decir así, un caso particular a la aritmética de la relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo los conceptos F y G. Pero Frege no realiza esta reducción directamente, sino que antes, como vimos, introduce la noción de extensión de concepto, la cual por un lado tiene las mismas condiciones de identidad relativo a los conceptos que los números, y por otro dichas condiciones de identidad son equivalentes a la equinumerosidad entre conceptos. Entonces, las extensiones de conceptos parecen servir de puente entre la identidad numérica entre conceptos y la equinumerosidad entre conceptos. Esto se ve en la segunda parte de la definición del concepto de número,

> [**B**] el número que le corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico al concepto F",[164]

donde claramente las extensiones median entre los números y la equinumerosidad. Entonces, para determinar el número de objetos que caen, e.g., bajo el concepto "desigual a sí mismo", según Frege, hay que entender lo que significa la expresión "la extensión del concepto 'equinumérico al concepto 'desigual a sí mismo''", en la cual hay que aclarar dos nociones importantes: extensión y equinumerosidad. La equinumerosidad entre conceptos es definida en la tercera parte de la definición del concepto general de número:

> [**C**] la expresión "el concepto F es equinumérico al concepto G" será sinónima de la expresión "hay una relación ϕ, que ordena por correspondencia

---

[164]Ibid. §§68, 72.

> biunívoca los objetos que caen bajo el concepto F
> con los objetos que caen bajo el concepto G".[165]

A la misma vez, si bien Frege no considera necesario aclarar lo que es una extensión de concepto — ya sea por que se presupone su comprensión o porque se piensa que no es necesaria la misma —, lo cierto es que, como vimos, Frege considera necesario demostrar que la identidad entre extensiones equivale a la equinumerosidad definida en términos de correspondencia biunívoca.[166] Por ende, las extensiones de concepto sirven de puente entre la identidad numérica y la relación lógica de correspondencia biunívoca, que, como hemos dicho, es el sentido lógico de la identidad numérica.

Nos parece claro sin embargo, que aún con la aclaración de las condiciones de identidad de las extensiones de conceptos, primero en términos de la identidad de un número que corresponda a dos conceptos, y luego en términos de la correspondencia biunívoca por medio de la equinumerosidad, no podemos decir con base en lo expresado en *GlA* lo que significa la expresión "la extensión del concepto 'equinumérico al concepto 'desigual a sí mismo''", ni en general lo que es la extensión de cualquier concepto. Por lo tanto, no se tienen en *GlA* los medios para determinar el número que le corresponde a un concepto dado, a partir del hecho de que unos objetos caigan bajo dicho concepto, puesto que para ello tienen que mediar las extensiones de conceptos si es que se le da importancia a la definición [**B**]. Entonces, si median las extensiones de conceptos, no podemos determinar para todo argumento, el valor veritativo de la expresión "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde" en [**A**], y, por lo tanto, el

---

165 Ibid. §72, p. 85.
166 Ibid. §73, pp. 85-86.

concepto de número significado por la expresión "*n* es un número" no parece estar completamente definido.

Por otra parte, Frege ofrece una demostración de que 0 es el número que le corresponde a un concepto siempre que bajo dicho concepto no caiga ningún concepto. Pero, muy significativamente, en dicha demostración no utiliza explícitamente la noción de extensión de concepto. Según él, si se demuestra que

> todo concepto bajo el cual no caiga [ningún objeto] es equinumérico a todo concepto bajo el cual no caiga [ningún objeto] y solamente a un tal concepto,[167]

entonces se sigue que 0 es el número que le corresponde a cualquiera de dichos conceptos. Por ende, si el concepto "desigual a sí mismo" es equinumérico a todo concepto bajo el cual no cae ningún objeto, entonces, según Frege, se sigue que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto y también a todos los conceptos que sean equinuméricos con el mismo. A la vez, Frege sostiene que su definición de equinumerosidad, en términos de la existencia de una relación de correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo los conceptos equinuméricos, vale incluso en el caso de que no caigan objetos bajo los conceptos dados.[168] Pero, dejando a un lado esta incomodidad, lo importante es señalar que Frege no dice explícitamente en virtud de qué se puede concluir que 0 es el número que le corresponde al concepto "desigual a sí mismo" a partir de que dicho concepto sea equinumérico a todo concepto bajo el cual no caiga ningún concepto. Tan sólo parece que podemos inferir de esto último que no cae ningún objeto bajo

---

[167]Ibid. §75, p. 88.
[168]Ibid. §71, pp. 83-84.

dicho concepto, puesto que la equinumerosidad está propiamente definida como hemos dicho. Pero a partir de aquí, como vimos, no se puede pasar directamente a decir que 0 es el número que le corresponde a dicho concepto. De acuerdo a la división en tres partes de la definición del concepto de número, tienen que mediar las extensiones de conceptos para poder pasar de la relación lógica de correspondencia biunívoca a la identidad de los números en la aritmética, a partir de la cual se debe obtener el concepto general de número. Entonces, mientras la noción lógica de extensión de concepto permanezca sin aclarar suficientemente, parece incompleta la definición del concepto de número.

En el caso de los números infinitos, Frege define a ∞_1 como el número que corresponde al concepto "número finito",[169] el cual es definido a su vez diciendo que

> la proposición "*n* en un miembro de la serie de los números naturales que comienza con 0" será sinónima de la proposición "*n* es un número finito",

en donde se define nuevamente una expresión conceptual que contiene una variable en términos de otra expresión conceptual que contiene la misma variable. En cuanto a que existe un concepto al cual él le corresponde ("número finito"), el número ∞_1 es un número como cualquier otro. Según Frege:

> En el número infinito ∞_1 así definido no hay nada lleno de misterio o maravilloso. [La expresión] "el número que corresponde al concepto F es ∞_1" quiere decir ni más ni menos que: hay una relación

[169]Ibid. §84, p. 96.

> que ordena por correspondencia biunívoca a los objetos que caen bajo el concepto F con los números finitos.[170]

En esta ocasión, puesto que el número ∞_1 ha sido definido previamente como el número que corresponde al concepto "número finito", la expresión "el número que corresponde al concepto F es ∞_1" no es más que una instancia de la llamada equivalencia original, a saber, "el número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G", la cual fue definida en términos de la relación de correspondencia biunívoca. Pero como vimos, dicha definición se hace en una suerte de cadena en donde entre la identidad numérica y la relación de correspondencia se encuentran las extensiones de conceptos, las cuales, por no ser aclaradas en *GlA*, desmerecen el sistema lógico al cual Frege pretende reducir las nociones aritméticas. A la misma vez, el hecho de que se trate de reducir la identidad numérica a la noción lógica de la relación de correspondencia biunívoca, pone de manifiesto el intento de obtener el concepto de número a partir de nociones lógicas, y no como producto de la experiencia sensible como sostenía J. S. Mill ni de la intuición como sostenía Kant.

§11 Conclusión de Frege sólo verosímil

En el quinto capítulo de *GlA*, Frege hace claro que su estudio no es definitivo hasta tanto no se expresen las definiciones y se deriven los teoremas aritméticos mediante un lenguaje lógico formalizado. En efecto, su próximo libro acometerá dicha tarea utilizando el lenguaje de *BS*. En lo que respecta a *GlA*, nos dice:

---

[170] Ibid. §84, p. 97.

> Yo no pretendo haber hecho la naturaleza analítica de las proposiciones aritméticas más que verosímil (*wahrscheinlich*), porque siempre se podría dudar si su justificación puede ser obtenida completamente a partir de leyes puras de la lógica, o si alguna otra premisa está involucrada en algún lugar sin ser notada.[171]

Recordemos que la derivabilidad o justificación de los teoremas de la aritmética a partir de definiciones y leyes generales de la lógica establece para Frege el carácter analítico de dichos teoremas. Pero Frege decide posponer dicha conclusión hasta que las definiciones y las derivaciones sean ofrecidas con todo el rigor que su simbología de *BS* introdujo a la lógica.

[171] Ibid. §90, p. 102.

Capítulo II: *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903)

§12 Nociones lógicas primitivas

El proyecto logicista de Frege, mediante el cual éste pretendía demostrar la reductibilidad de la aritmética a la lógica, no consistió meramente de una formalización de la aritmética misma, sino que se basó también en innovaciones tanto en la lógica como en la semántica. Por un lado, el sistema lógico que Frege había expuesto en su *BS*, además de introducir una simbología muy precisa para impedir que se dieran saltos en las derivaciones de teoremas, introdujo los cuantificadores, lo cual aumentó considerablemente la capacidad expresiva de un lenguaje lógico, a tal punto que la lógica se convirtió en un medio indispensable para el estudio de los fundamentos de las matemáticas y de cualquier otra ciencia formalizada. Todas estas aportaciones hacen de Frege una figura central en el surgimiento de la lógica matemática contemporánea. Por otro lado, los estudios semánticos de Frege, en los cuales el problema de la relación entre lenguaje y verdad fue el foco de atención, mientras que el problema de la relación entre mente y verdad fue dejado a un lado, dieron un impulso decisivo al surgimiento de la filosofía analítica contemporánea que centra su atención en el análisis del lenguaje considerado en sí mismo. En particular, en dicha tradición filosófica el lenguaje de la lógica dejó de incluir elementos psicológicos como el de idea o representación (*Vorstellung*), que, como señalara J. Alberto Coffa, había sido la noción más importante de la lógica desde la Lógica de Port-Royal de época e influencia cartesiana.[172]

La gran obra fregeana que pretendía demostrar de una vez y por todas la tesis logicista de la aritmética, *Die Grundgesetze der Arithmetik* (*GgA*),

---

[172]Coffa (1991), p. 9.

cuyo primer volumen se publica en 1893, pero cuyo segundo volumen es publicado en 1903, incorpora estudios sobre las nociones lógicas primitivas de función, concepto, relación, y objeto, que si bien fueron tratadas por Frege en *GlA*, no obstante fueron objeto de estudio más detenido por parte de Frege durante los años que separaron la publicación de dichas dos obras. A la misma vez, durante ese intervalo de tiempo, que, según Terrell Ward Bynum, fue uno de los más productivos en la carrera de Frege,[173] este último desarrolla su distinción semántica fundamental entre sentido (*Sinn*) y denotación (*Bedeutung*). Los resultados tanto del examen de las nociones primitivas de la lógica como del desarrollo de sus dos nociones semánticas fundamentales fueron publicados en diversos artículos justo antes de la publicación del primer volumen de *GgA*.[174] En la presente sección señalaremos la concepción de Frege de dichas nociones lógicas según son introducidas en *GgA*. En la próxima sección examinaremos las nociones semánticas de sentido y denotación, que, como vimos, según la propia admisión de Frege no habían sido consideradas en *GlA*.[175]

Como ya señalara Frege en *GlA*, las nociones de la lógica son consideradas por él objetivas en el sentido fregeano particular de dicho término que expusimos en la §7 del primer capítulo. Ellas pertenecen a un dominio "no-real objetivo", en el cual no tienen injerencia asuntos de índole psicológica o subjetiva. Por el contrario, según Frege:

> puesto que los lógicos psicologistas no comprenden
> la posibilidad de lo objetivo no-real, consideran que

---

[173]Bynum (1972), p. 30.

[174]Sobre las nociones de la lógica publicó: "Funktion und Begriff" en 1891 y "Über Begriff und Gegenstand" en 1892. Sobre las nociones semánticas publicó "Über Sinn und Bedeutung" en 1892 y poco después escribió un artículo que además de complementar a este último, también abundó sobre las nociones lógicas, y que fue publicado póstumamente con un título puesto por los editores: "Ausführungen über Sinn und Bedeutung".

[175]Ver §6 del Capítulo I.

> los conceptos son representaciones, y por ende los hacen parte de la psicología.[176]

Como ya viéramos, Frege prefiere usar el término representación solamente en su sentido psicológico.[177] De esa manera evita su uso ambiguo, el cual, según, Coffa, puede ser hallado en obras tempranas de Kant.[178]

En *GgA*, las nociones de función y objeto se toman como primitivas, y se definen las de concepto y relación en términos de la de función. Por ende, la distinción fundamental ya no debe ser aquella exigida en *GlA*, a saber, entre concepto y objeto, sino que debe ser hecha entre función y objeto. Pero la distinción entre estas dos últimas no puede ser decidida mediante definición. En su artículo "Sobre función y concepto" de 1891, Frege admite que no se puede definir lo que es un objeto y lo que es una función, por lo cual éstas serán las nociones lógicas primitivas a las que se reduce su filosofía de la matemática. Allí dice:

> [...] nos preguntamos ahora qué llamamos aquí objeto. Estimo que de esto es imposible dar una definición escolástica (*schulgemäß*),[179] pues estamos ante algo que por su simplicidad no admite una división lógica. Solamente se puede señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo se puede afirmar escuetamente: objeto es todo lo que no es función, cuya expresión no lleva consigo un lugar vacío.[180]

[176] *GgA*, XVIII.
[177] Ibid..
[178] Coffa (1991), pp. 9, 375.
[179] Según Kluge (1980), p. 139, aquí Frege entiende por definición escolástica el tradicional método de división por género próximo y diferencia específica; como, por ejemplo, ser humano en términos de animal racional, y cuadrado en términos de paralelogramo de cuatro lados congruentes.
[180] *KS*, p. 134.

Así pues, si bien Frege pretenderá definir todas las nociones de la aritmética en términos de nociones objetivas de la lógica, tal completud para las definiciones no es posible, según él, en el caso de la lógica. Tan sólo se puede esclarecer lo que es una función o un objeto, puesto que su simplicidad lógica impide un análisis en términos de otras nociones.

Frege basa su distinción entre función y objeto principalmente en el carácter particular que tienen las expresiones que les corresponden, a pesar de las dificultades que señaláramos que éste había encontrado al utilizar criterios gramaticales para distinguir objetos de conceptos en *GlA*.[181] Teniendo en mente como siempre la distinción entre el signo y lo designado,[182] Frege señala que reconocemos que

> [...] el contenido, la denotación de "$2 \times 2^3 + 2$" [es] la misma que la de "18" o de "3×6".[183]

Dicha denotación es, según Frege, el objeto particular denotado, en este caso el número dieciocho. Por otro lado, si bien las expresiones "$2 \times 1^3 + 1$", "$2 \times 4^3 + 4$" y "$2 \times 5^3 + 5$" también tienen como denotación un número particular en cada caso, podemos reconocer un contenido que es común a las tres, al cual llama Frege la función.[184] Considera pues que el elemento que es distinto en cada una de las expresiones no pertenece a dicha función. Por ende, Frege entiende que los argumentos 1, 4 y 5 no son parte de la función, y que la función en cuestión es lo que denota la expresión "$2 \times x^3 + x$", entendiendo a la variable x como demarcando un lugar vacío.[185] Por lo tanto, las expresiones para funciones se distinguen claramente de las expresiones para objetos,

---

[181]Ver §5 del Capítulo I.
[182]Frege, *KS*, p. 126.
[183]Ibid.
[184]Ibid., p. 128.
[185]Ibid.

puesto que no son "saturadas" y tienen al menos un lugar que puede ser ocupado por el nombre de un argumento.

Por otro lado, no podemos definir, según Frege, lo que es una función diciendo que es una expresión formada a partir de las notaciones para suma, producto, potencia, etc., y de variables y signos numéricos. De tal manera estaríamos definiendo meramente una expresión y no lo que ella significa.[186] Más bien, Frege entiende que la "esencia" de la función yace en la correspondencia que ella establece entre cada argumento y el valor que se obtiene cuando el mismo es colocado en el lugar demarcado por la variable, y que en el caso de las funciones matemáticas puede ser intuitivamente representada por una gráfica.[187]

Frege prefiere usar la letras griegas ξ y ζ en vez de las letras x e y. A la misma vez, no les llama variables sino lugares de argumentos (*Argumentstellen*).[188] De tal manera hace claro el hecho de que una expresión para una función no es completa en sí misma. Entonces, empleando las letras griegas Φ y Ψ como nombres para funciones —reservando las minúsculas como ϕ para variables para funciones, las cuales son llamadas a su vez argumentos del segundo tipo—, una función se podría expresar ya sea mediante $\Phi(\xi)$ o mediante $\Phi()$, pues la variable lo que hace es demarcar el lugar que debe ser ocupado por un nombre denotativo. La expresión para una función es completada mediante la colocación de un nombre para un argumento en un lugar de argumento, y la expresión resultante es el nombre del valor de la función para dicho argumento. Así pues:

---

[186] *GgA*, §1, p. 5; *KS*, pp. 125-26.
[187] Ibid., §1, p. 5.
[188] Ibid., p. 6.

> "$(2 + 3 \times 1^2) \times 1$" es un nombre del número 5, compuesto a partir del nombre de función "$(2 + 3 \times \xi^2) \times \xi$" y [del nombre del argumento] "1".[189]

En este caso, el número 5 es el valor de dicha función al tomar al número 1 como argumento.

Sin embargo, la noción fregeana de función no se limita a la propiamente matemática, pues de tal manera no podría ser una noción fundamental de la lógica. Frege admite también como nombres de funciones a expresiones como "$\xi^2 = 4$" y "$\xi < 2$", cuyos valores, según él, no son números, sino pensamientos verdaderos o falsos.[190] Nos dice Frege:

> [...] los nombres "$2^2 = 4$" y "$3 > 2$" denotan el mismo valor veritativo (*Wahrheitswerth*), al cual llamo simplemente lo verdadero.[191]

A la misma vez, en el caso de los nombres "$3^2 = 4$" y "$1 > 2$", según Frege, ambos denotan lo falso.[192] Para Frege, éstos también son nombres propios que denotan objetos, tal como "2" y "Aristóteles". La diferencia entre distintos nombres para uno y el mismo objeto estriba en que ellos tienen sentidos diferentes. Según Frege, "2^2" y "$2 + 2$" tienen la misma denotación pero distinto sentido.[193] De igual manera, "$2^2 = 4$" y "$2 + 2 = 4$" tienen la misma denotación pero distinto sentido, a los cuales llama Frege en estos dos últimos casos, por tratarse de nombres que denotan un valor veritativo, distintos pensamientos. Como se ve, Frege considera que ambos valores veritativos, lo verdadero y lo falso, son objetos, tal como lo son los números,

---

[189]Ibid.
[190]Ibid., §2, p. 6.
[191]Ibid., p. 7.
[192]Ibid.
[193]Ibid.

por lo que las expresiones que los denotan están completamente saturadas, y son llamadas por él nombres propios.[194]

Habiendo ampliado el dominio de los objetos para incluir no sólo números sino también valores veritativos, Frege amplía consecuentemente el dominio de los valores que pueden tener las funciones. Entonces, los conceptos y las relaciones serán definidos como funciones que tengan, para cualquier argumento, sólo valores veritativos como valores. Aquellas funciones de un solo argumento cuyo valor sea siempre un valor veritativo, son llamadas por Frege conceptos.[195] Las relaciones son definidas a su vez como funciones de dos argumentos cuyo valor es siempre un valor veritativo.[196] Un ejemplo prototípico dado por Frege de un nombre de una relación lo es "$\xi = \zeta$".

Otra noción lógica fundamental, cuyo carácter ha dado pie a mucho debate entre los estudiosos de Frege, es la del curso de valor de una función. Ella, conjuntamente con un símbolo para reemplazar el artículo determinado del lenguaje natural, son las únicas nociones lógicas primitivas que Frege utiliza por primera vez en *GgA*[197] Por su parte, la noción de extensión de concepto, que en *GlA* había quedado indeterminada, es definida en *GgA* precisamente en términos de la noción de curso de valor.[198] Puesto que los números se definen también en *GgA* como extensiones de ciertos conceptos, entonces los números en *GgA* son definidos en términos de cursos de valores. Por otro lado, los valores veritativos son también definidos en términos de cursos de valores.[199] Consecuentemente, Frege dedica las §§3, 9, y

[194]Ibid.
[195]Ibid., §3, p. 8.
[196]Ibid., §4, p. 8.
[197]Ibid., IX.
[198]Ibid., §3, p. 8.
[199]Ibid., §10, p. 17.

10 a tratar de esclarecer dicha noción, que ya había expuesto en su artículo "Función y concepto" de 1891.

En dicho artículo, tal como comparaba distintos nombres con la misma denotación para esclarecer lo que es un objeto, tanto en el caso de los números como en el caso de los valores veritativos, compara dos nombres de funciones que en este caso tienen la particularidad de que expresan funciones que asignan los mismos valores para cada argumento. Utilizando un ejemplo de la geometría analítica, nos dice que si representamos los valores de una función mediante una gráfica en donde los argumentos estén representados en la abscisa y los valores a su vez en la ordenada, entonces la correspondencia entre los argumentos y los valores de la función en cuestión serán representados por un conjunto de puntos.[200] Frege nos ofrece el ejemplo de las expresiones para funciones "$x\ (x - 4)$" y "$x^2 - 4x$". Sorprendentemente, al ver que ambas establecen una y la misma correspondencia entre el dominio de los argumentos y el dominio del los valores, no nos dice que ambas expresiones denotan una y la misma función. Pues como vimos, más arriba, Frege luego dirá en la §1 de *GgA* que:

> La esencia de la función se da a conocer, por el contrario, en la correspondencia (*Zusammengehörigkeit*) que establece entre los números cuyos símbolos son puestos por la "x" y los números que aparecen como denotación de [la] expresión [resultante] [...][201]

Según Frege, la función es aquello que establece una correspondencia entre los argumentos y los valores, siendo llamada la dicha correspondencia misma

---

[200] *KS*, p. 129.
[201] *GgA*, §1, p. 5.

el curso de valores.[202] Como han señalado varios estudiosos,[203] Frege parece entender que la función misma es algo anterior y más fundamental que su curso de valores. En el caso de un concepto, Frege lo identifica, en la introducción de *GgA*,[204] si bien de manera sugestiva, con su nota característica, es decir, con la propiedad que debe tener un objeto para caer bajo el mismo. Si entendemos a dicha propiedad como la responsable de que unos objetos sean reunidos bajo un concepto dado, entonces esta interpretación parece estar de acuerdo con lo que Frege había dicho en su artículo inédito "Ampliaciones (*Ausführungen*) sobre sentido y denotación", donde declaraba que:

> Si bien hay que conceder a los lógicos intensionalistas que el concepto es lo fundamental [lo originario] frente a su extensión, esto no quiere decir que éste sea el sentido de la palabra de concepto, sino que es su denotación; los lógicos extensionalistas se acercan más a la verdad en tanto presentan, en la extensión, una denotación como lo esencial. Aun cuando dicha denotación [la extensión] no es el concepto mismo, ella está estrechamente vinculada al mismo.[205]

Retomando el método de comparación de expresiones para introducir nociones nuevas, Frege nos presenta las expresiones "x (x - 4)" y "x^2 - 4x", nos dice que ambas tienen el mismo curso de valores.[206] Sin embargo, Frege no

[202] En "Función y concepto", Frege nos dice que la gráfica generada por la función hace corresponder a cada argumento con un valor, lo cual nos permite representarnos "los valores de una función para distintos argumentos", *KS*, p. 129.
[203] Ver Sluga (1980), pp. 145-146; y Avila (1988), pp. 26-27.
[204] *GgA* IX, XIV.
[205] *NS*, p. 134.
[206] *KS*, p. 129.

entiende que ellas denotan uno y el mismo curso de valores, sino que cada una denota una función diferente. De tal manera rompe con el patrón que hemos visto de introducir nociones primitivas nuevas mediante el señalamiento de que dos o más expresiones dadas tienen algo en común como denotación. Dice Frege:

> Cuando escribimos $x^2 - 4x = x(x - 4)$, de tal manera no hemos igualado una función con la otra, sino que sólo hemos igualado los valores de una función con los de la otra.[207]

En la §3 de *GgA*, Frege introduce la noción de curso de valores utilizando un procedimiento semejante al de la llamada "equivalencia original" que vimos en el primer capítulo, y que es similar a la llamada definición contextual de la frase "el número que pertenece al concepto F" del la §65 de *GlA*. Nos dice:

> En general, yo utilizo las palabras "la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo curso de valores que la función $\Psi(\xi)$" con el mismo significado (*gleichbedeutend*) que las palabras "las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento".[208]

Esta estipulación, según Frege, debe ser considerada como una ley lógica que expresa la posibilidad de la transformación de generalidad de una igualdad en una identidad entre cursos de valores.[209] La misma es adoptada por Frege, en su versión formalizada, como uno de los axiomas de su sistema lógico, a saber, el principio V.[210] Sobre el mismo, Frege expresó reservas en el propio

[207] Ibid., p. 130.
[208] *GgA*, §3, p. 7.
[209] Ibid., §9, p. 14;
[210] Ibid., §20, p. 36.

prólogo de *GgA*,[211] Aun así, Frege basó en el mismo la introducción de los cursos de valores de funciones, si bien no tomó el mismo como una definición propiamente. Las nociones lógicas primitivas de su sistema quedan pues esclarecidas, pero no propiamente definidas. En cuanto a la notación, Frege introduce la expresión '$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$', cuya denotación será el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$.[212]

§13 La distinción semántica fundamental

Luego de exponer las indicaciones de Frege acerca de cómo se deben comprender sus nociones lógicas primitivas, no podemos pasar a examinar cómo Frege define nuevas nociones en términos de aquéllas, sin antes tener una teoría semántica que explique el alcance que deban tener las definiciones. Como vimos en la §6 del primer capítulo, las definiciones ofrecidas en *GlA* son semánticamente inadecuadas, puesto que no se especifica allí el carácter del significado que mediante definición se estipulaba que era compartido por dos expresiones. En particular, vimos como Frege, en su artículo "Función y concepto" declaraba que toda definición estipula el sentido o la denotación de un signo, y que si no se toma en cuenta dicha distinción semántica no se puede hablar de definición.[213] En el pasaje aludido, que de hecho Frege pone como una nota al calce, no nos dice, sin embargo, que una definición deba estipular tanto el sentido como la denotación de un nuevo signo. Pero en la §27 de *GgA*, Frege dice que:

> Introdujimos mediante una definición un nuevo nombre, mediante lo cual determinamos que éste

---

[211]Ibid., VII.
[212]Ibid., §9, p. 15.
[213]*KS*, p. 127.

> tendrá el mismo sentido y la misma denotación que un [nombre dado] que sea compuesto a partir de signos conocidos.[214]

Tal vacilación está probablemente vinculada con las dificultades de la doctrina de Frege acerca de los enunciados de identidad. Las definiciones, de hecho, según Frege, una vez introducidas, deben ser entendidas como enunciados de identidad.[215] Pero dicha concepción difiere de la concepción de enunciados de identidad que Frege expone en su célebre artículo "Sobre sentido y denotación" de 1892, en donde se concluye que en un enunciado de identidad que sea verdadero, las dos expresiones unidas por el signo de igualdad tienen una misma denotación pero pueden tener distinto sentido. Si el sentido del enunciado de identidad es obtenido extensionalmente a partir de los sentidos de sus expresiones constituyentes, entonces los enunciados "a = a" y "a = b" tendrían distinto sentido, es decir, expresarían un distinto pensamiento, lo cual según Frege explica la diferencia en el valor cognoscitivo entre ambos enunciados.[216]

Por otro lado, el desarrollo de la distinción entre sentido y denotación se origina en Frege precisamente con el intento de aclarar el carácter de los enunciados de igualdad o identidad. Frege comienza y termina su artículo "Sobre sentido y denotación" utilizando su distinción para tratar de esclarecer la semántica de los enunciados de igualdad, si bien dedica una gran parte de su artículo para explicar cómo su distinción se podría aplicar a oraciones subordinadas del lenguaje natural. Pero principalmente, el interés de Frege se centra en las oraciones asertivas completas, las cuales son del tipo que interesa

[214] *GgA*, §27, p. 45.
[215] Ibid.
[216] *KS*, p. 162.

a cualquier ciencia, y de las cuales nos interesa principalmente su valor veritativo. De las mismas, los enunciados de identidad son un caso particular.

Según Frege, la diferencia entre las expresiones "el lucero de la tarde" y "el lucero del amanecer" consiste en que ellas tienen distinto sentido, aún cuando ambas tienen la misma denotación, es decir, ambas denotan uno y el mismo objeto.[217] De aquí, que la identificación de ambas expresiones tenga consigo un valor cognoscitivo. En *BS*, Frege había considerado que un enunciado de identidad expresaba la relación entre dos nombres o signos que tienen "el mismo contenido conceptual".[218] Pero dicha relación, está mediada por la conexión arbitraria que existe entre un signo y lo designado por dicho signo.[219] Por otro lado, si se dijera que es una relación entre lo que los signos en cuestión denotan, entonces dicha relación sería, en el caso de un enunciado de identidad verdadero, meramente una relación trivial, sin ningún valor cognoscitivo, pues consistiría en una relación de un objeto consigo mismo.[220] Frege postula entonces una entidad semántica intermedia, que denomina el sentido del signo, el cual consiste en el particular "modo de darse" (*Art des Gegebenseins*) de lo designado. De esta manera, el valor cognoscitivo que corresponde a la identificación del objeto denotado por la expresión "el lucero de la mañana" con el denotado por la expresión "el lucero de la tarde" tiene su origen en el distinto modo de darse el objeto según cada expresión, es decir, en el distinto sentido de cada expresión. Dicho valor cognoscitivo también es indicador de que la relación entre el sentido y la denotación no es arbitraria, aún cuando Frege destaque que el hecho de

[217] *KS*, p. 144.
[218] *BS*, §8, p. 126.
[219] *KS*, p. 143.
[220] Ibid.

haber captado un sentido no implica que a éste le corresponda una denotación.[221]

Por otro lado, el sentido de un signo no es subjetivo, ni consiste de intuiciones. El sentido no es por lo tanto una representación. Puede ser "propiedad común de muchos" y por ende se diferencia "esencialmente" de la representación. El sentido es por lo tanto objetivo, tal como lo es la denotación. Se encuentra entre la denotación, que es el objeto mismo, y la representación, la cual es subjetiva y privada. Frege nos ofrece una metáfora para intentar aclarar qué es lo que entiende por el sentido. Cuando una persona observa la luna a través de un telescopio, se pueden distinguir claramente tres elementos en dicha situación: la luna misma, que sería la denotación, la imagen real proyectada mediante el lente en el interior del telescopio, que sería el sentido, y finalmente la imagen en la retina del observador, que sería su representación de la luna.[222] Por ende, el sentido no pertenece a ningún observador en particular, sino que puede "servir a varios observadores".[223]

En el caso particular de una oración asertiva completa, Frege nos dice que ella contiene un pensamiento.[224] La pregunta que Frege se hace es entonces si dicho pensamiento es el sentido, o si es, por el contrario, la denotación de una tal oración. Frege acude entonces a su argumento de sustituibilidad, a saber, nos dice que si en la oración asertiva en cuestión se reemplaza una palabra con otra que tenga la misma denotación pero distinto sentido, la denotación de la oración completa permanece inalterada. Pero el pensamiento de la oración completa sí cambia,

[221]*KS*, p. 145.
[222]Ibid.
[223]Ibid.
[224]*KS*, p. 148.

> [...] pues el pensamiento de la oración "el lucero de la mañana es un cuerpo iluminado por el sol" es distinto del de la oración "el lucero de la tarde es un cuerpo iluminado por el sol". Alguien que no supiera que el lucero de la tarde es el lucero de la mañana podría sostener que uno de los pensamientos es verdadero y que el otro es falso.[225]

Por ende, según Frege, dicho pensamiento no puede ser la denotación de la oración y es en cambio su sentido. Hay que señalar, sin embargo, que se ha demostrado que la sustituibilidad *salva veritate* de un nombre para un objeto por otro nombre con el mismo objeto como denotación depende del tipo de oración en cuestión. Por ejemplo, Quine ha llamado a oraciones que no tienen dicha propiedad "contextos referencialmente opacos".[226] No obstante, es claro que el principio de sustituibilidad para expresiones puramente aritméticas es válido.

Por otro lado, Frege basa en este principio la justificación de su tesis de que la denotación de una oración asertiva es un valor veritativo.[227] Se ha demostrado, sin embargo, que el valor veritativo no es lo único que permanece invariable, y por ende no se puede concluir que la denotación de la oración completa tenga que ser su valor veritativo.[228] Si dicha tesis es correcta, dice Frege, entonces todas las oraciones verdaderas tienen una misma denotación, lo verdadero, y todas las falsas tienen una misma denotación, lo falso.[229]

---

[225] Ibid.
[226] Quine (1980), pp. 139-159.
[227] *KS*, p. 150.
[228] Rosado Haddock (1982), pp. 431-432.
[229] *KS*, p. 150.

Por lo tanto, para Frege las oraciones asertivas completas son nombres propios, y como tales deben tener un sentido y una denotación. Su sentido es un pensamiento y su denotación es un valor veritativo. En este caso la conexión entre sentido y denotación tampoco debe ser arbitraria. Pues Frege nos dice que los pensamientos no son arbitrariamente verdaderos o falsos. Mas bien, ellos son verdaderos o falsos independientemente de que se les reconozca como tales.[230] Sin embargo, no encontramos que Frege utilice el argumento del valor cognoscitivo en el caso de las oraciones asertivas completas, aún cuando las considera nombres propios que denotan un valor veritativo. Se podría de tal manera justificar la diferencia en el valor cognoscitivo de distintas oraciones que tengan una misma denotación. Lo cual en el caso de Frege, equivaldría a justificar las diferencias entre el valor cognoscitivo entre oraciones verdaderas, y entre oraciones falsas. Dichas diferencias serían pues distintos modos de darse lo verdadero o lo falso. Pero Frege no utiliza este camino para aclarar lo que son los sentidos de las oraciones asertivas.

En la §32 de *GgA*, Frege trata de aclarar más precisamente el sentido de una oración asertiva completa, es decir, de un enunciado. Allí nos dice nuevamente que el sentido de todo nombre de un valor veritativo consiste en un pensamiento. Entonces, puesto que en las definiciones de las funciones han sido aclaradas las condiciones bajo las cuales el valor de las mismas es lo verdadero,

> El sentido de un nombre [de un valor veritativo],
> [es decir], el pensamiento es [la proposición de que]
> que dichas condiciones sean satisfechas.[231]

---

[230]*GgA* XV-XVI; Ver también *GlA* , VI.
[231]Ibid., §32, p. 50.

Pero Frege no desarrolla dicha concepción fuera de dicha sección en *GgA*.

Finalmente, en el caso de las expresiones para funciones, Frege nos dice en su artículo inédito "Comentarios sobre sentido y denotación", —en el cual nos habla propiamente de palabras de concepto, las cuales ya había considerado casos particulares de expresiones para funciones en su artículo "Función y concepto"—, que deben tener siempre un sentido y una denotación al considerárseles en sí mismas, tal como todos los nombres para objetos.[232] Según Frege, la denotación de una expresión funcional es la función misma cuando ella es usada propiamente.[233] Frege no tarda, sin embargo, en encontrar dificultades con dicha concepción.

Si bien, mediante el argumento de sustituibilidad, se demostraba que la denotación de una oración asertiva es un valor veritativo, puesto que dicho valor veritativo de una tal oración permanece invariable cuando se reemplaza en dicha oración un nombre que denote un objeto por otro con la misma denotación, este mismo argumento, utilizado de manera inversa, parece demostrar que la denotación de una palabra funcional lo es un curso de valores y no una función. Nos dice el propio Frege, que:

> [...] en cualquier oración se pueden reemplazar las palabras de concepto, *salva veritate*, siempre y cuando [las palabras reemplazadas] tengan una misma extensión conceptual. [...] Tal como los nombres propios del mismo objeto se pueden reemplazar mutuamente dejando a salvo la verdad, así también puede hacerse con las palabras de concepto si su extensión conceptual es la misma.[234]

[232] *NS*, p. 128; Ver también la carta de Frege a Husserl del 24 de mayo de 1891 en *WB*, pp. 94-98.
[233] Ibid. 78
[234] Ibid. 78

Por ende, como las extensiones de concepto son cursos de valores de ciertas funciones,[235] dicho argumento demostraría que las denotaciones de expresiones para funciones son cursos de valores.

Frege rechaza de inmediato dicha conclusión, diciendo primero que esto contradice su premisa de que las extensiones de concepto son objetos, y que por ende ellas son denotaciones de expresiones saturadas. Esta premisa, sin embargo, se basa en el simple hecho de que las expresiones que Frege introduce para denotar cursos de valores —y por ende las extensiones de conceptos— son saturadas.[236] En segundo lugar, la rechaza diciendo que si la denotación de una palabra conceptual fuera una extensión de concepto, entonces las palabras de concepto que signifiquen conceptos vacíos, es decir, conceptos bajo los cuales no caiga ningún objeto, carecerían de denotación.[237] Pero como vimos, Frege exige que tanto los nombres para objetos como los nombres para funciones tengan siempre tanto sentido como denotación.

Por otro lado, Frege tampoco hace uso, en el caso de las expresiones para funciones, del argumento del valor cognoscitivo que utilizó para justificar la introducción de la noción del sentido de un nombre para objetos. Frege en ningún momento nos ofrece un ejemplo de dos expresiones distintas que tengan una y la misma función como denotación, lo cual vimos más arriba sí hace para demostrar la necesidad de la introducción de los sentidos de los nombres para objetos.[238] Tan sólo nos ofrece repetidas veces ejemplos de dos funciones que tienen un mismo curso de valores, lo cual se da siempre y cuando las funciones en cuestión tengan los mismos valores

[235] *KS*, p. 133.
[236] *KS*, p. 135.
[237] *NS*, p. 135.
[238] Según Frege, no se pueden igualar funciones como se hace con objetos. Es decir, que su interpretación de "Sobre sentido y denotación" para los enunciados de identidad vale para expresiones para objetos pero no para expresiones funcionales. La mutua subordinación entre conceptos es similar a la identidad entre objetos, pero no son una y la misma relación. *NS*, pp. 130-132.

para cada argumento.[239] Nos parece que podría haber argüido que, por ejemplo, la verdad del enunciado de identidad "$x^2 + 4x = x\ (x + 4)$" indica que las expresiones "$x^2 + 4x$" y "$x\ (x + 4)$" denotan una y la misma función, y que el valor cognoscitivo que ciertamente tiene dicha identificación responde a que cada expresión funcional tiene un sentido distinto. Frege sin embargo, trata a dichas expresiones funcionales como denotando dos distintas funciones, lo cual, por ejemplo, contradice el principio de sustituibilidad *salva veritate* de expresiones con la misma denotación, pues ellas son ciertamente intercambiables *salva veritate* en cualquier expresión aritmética.

Frege prefiere decir que el enunciado "$x^2 + 4x = x\ (x + 4)$" no es propiamente un enunciado de identidad, puesto que entre funciones no cabe ni siquiera hablar de identidad. La identidad se da propiamente entre objetos. Entre funciones se da una suerte de relación similar que corresponde a la identidad entre objetos, pero que no debe ser confundida con ella.[240] Según Frege, puesto que las funciones, y por ende también los conceptos y relaciones, tienen al menos un lugar vacío que debe ser llenado de alguna manera, por lo tanto:

> [...] a un lado de un signo de igualdad o de un signo similar jamás puede ponerse la mera designación de un concepto [o en general, de cualquier función], sino que además del concepto debe ser designado o aludido un objeto.[241]

La denotación de una palabra para función es discutida en *GgA* en la §29. Pero en dicho pasaje solamente se discute cómo determinar si una palabra para función tiene o no denotación, sin decirnos explícitamente cuál

---

[239] *KS*, p. 130; *NS*, p. 132.
[240] *NS*, p. 132.
[241] *NS*, p. 131.

es dicha denotación. Por ejemplo, Frege dice que, en el caso de un nombre para una función de primer orden de un argumento, éste:

> tiene una denotación (denota algo, es denotativo [*bedeutungsvoll*]), cuando tenga una denotación el nombre propio que se origina a partir de dicho nombre de función mediante la colocación de un nombre propio en los lugares de argumento, siempre que este último tenga una denotación.[242]

Resulta evidente, que Frege no nos dice aquí cuál es la denotación de un nombre para función, y en general, en *GgA*, no desarrolla este tema.

§14 El principio de completud para las definiciones

En las §§56-67 del segundo volumen de *GgA*, Frege discute su principio de completud para las definiciones. El mismo reza como sigue:

> La definición de un concepto (un predicado posible) debe ser completa (*vollständig*), ella debe determinar unívocamente para cada objeto si éste cae o no bajo el concepto (si el predicado puede ser expresado de él con verdad).[243]

Este principio es aplicado por Frege, como él mismo advierte,[244] en el caso de las definiciones de las funciones veritativas primitivas que ofrece en el primer volumen de *GgA*, las cuales no son ofrecidas en el lenguaje objeto,[245] y que según Frege no son propiamente definiciones sino una suerte de

---

[242] *GgA*, §29, p. 45-46.
[243] Ibid., ii, §56, p. 69.
[244] Ibid., Nota en ii, §65, p. 78.
[245] Ibid., §§5-13; *BS*, §§1-12.

estipulaciones.[246] Así pues, las conectivas veritativas de su lenguaje lógico, que para Frege son conceptos, puesto que siempre tienen como valor un valor veritativo, son definidas para todos los objetos como argumentos. Como hemos visto, esto implica que sean definidas para números, valores veritativos, y cursos de valores, así como para cualquier otro objeto sensible o no. Esto se diferencia claramente de su práctica definitoria en *BS*, en donde había definido las mismas funciones veritativas sólo considerando a los contenidos enjuiciables como argumentos.[247]

La primera función veritativa, el trazo horizontal "—ξ" —llamado en *BS* el trazo del contenido—, es definida pues para todo objeto como argumento. Frege la define en la §5 de *GgA*, estipulando que ella tendrá el valor de lo verdadero para lo verdadero como argumento, y que tendrá el valor de lo falso para cualquier otro argumento.[248] Para lo verdadero como argumento, e.g., "$2^2 = 4$", tendrá lo verdadero como valor, por ende el valor de "—$2^2 = 4$" es lo verdadero.[249] Para lo falso como argumento, e.g., "$2^2 = 5$", tendrá lo falso como valor, por ende el valor de "—$2^2 = 5$" es lo falso.[250] Para cualquier otro objeto como argumento, como, e.g., "2", tendrá también lo falso como valor, por ende el valor de "—2" es lo falso.[251] Como se ve, Frege no limita el dominio de los argumentos a la hora de definir dicha función veritativa. Puesto que su valor es siempre un valor de verdad, independientemente del objeto que se tome como argumento, ella es un concepto. Y en virtud de las tres estipulaciones que da Frege, éste es un concepto definido completamente. Podríamos llamarlo el concepto de lo verdadero, puesto que por definición, bajo éste cae solamente lo verdadero.

246 Ibid., Nota en p. 148.
247 *BS*, §§5-13.
248 *GgA*, §5.
249 Ibid.
250 Ibid.
251 Ibid.

La próxima conectiva que Frege introduce puede ser llamada el concepto de lo no verdadero, pues ella es un concepto que tiene como valor lo verdadero solamente cuando no tiene a lo verdadero como argumento. Es decir que para lo falso como argumento y para cualquier otro objeto como argumento con la única excepción de lo verdadero, ella tiene lo verdadero como valor. Solamente tiene lo falso como valor para lo verdadero como argumento. Es pues la función inversa de la anterior. Como en el caso del concepto de lo verdadero, el concepto de lo no verdadero es definido para todo objeto como argumento, sea éste valor veritativo o no. Su signo es llamado por Frege el trazo de la negación. El mismo consiste de la adición de un pequeño trazo vertical descendiente a partir del punto medio de un trazo horizontal.

La relación de identidad "$\xi = \zeta$" es definida por Frege diciendo que ella tiene el valor de verdadero solamente en el caso de que tenga como argumentos a uno y el mismo objeto. En todos los demás casos tiene el valor de lo falso.[252] Es importante aquí señalar, que esta definición utiliza como criterio solamente los argumentos mismos, es decir, los objetos denotados por los nombres que sean colocados en los lugares de argumento. Por ende, ella comprende tanto las identidades triviales, en donde tanto el sentido como la denotación de los nombres a cada lado del signo "=" sean iguales, como las identidades no triviales, en donde dichos nombres tengan una misma denotación pero un distinto sentido. Como veremos, Frege entiende que sus definiciones en el lenguaje objeto son identidades triviales, en donde tanto el sentido como la denotación de dos signos son idénticos.

[252]Ibid., §7, p. 11.

Frege define la función de universalidad o generalidad, llamada desde Peirce el cuantificador universal.[253] Frege la considera una función de segundo nivel u orden, puesto que toma siempre a una función y no a un objeto como argumento.[254] Sin embargo, el principio de completud es observado por Frege también en su definición. Frege define la función "Para todo *a*, $\Phi(a)$", en donde el lugar de argumento es demarcado por la variable para funciones $\Phi(a)$, estipulando que ella tenga el valor de lo verdadero si y sólo si el valor de la función argumento $\Phi(a)$ es lo verdadero para todo objeto como argumento de esta última. En caso contrario, el valor de "Para todo *a*, $\Phi(a)$" será lo falso.

De esta manera, Frege en *GgA*, a diferencia de *BS*, define sus conectivas lógicas, entendidas como funciones veritativas o, más precisamente, funciones cuyos valores son siempre un valor de verdad y por ende conceptos, para todos los objetos como argumentos. La única restricción para las funciones de primer orden en *GgA* es pues que tomen como argumentos sólo a objetos, y que esté determinado su valor para todo objeto como argumento.

Pero esta completud en el dominio de los objetos que pueden servir como argumento de las mismas, encuentra dificultades tan pronto se consideran los cursos de valores como argumentos. Estos, puesto que sus expresiones son saturadas, son considerados objetos por Frege. En particular, como las extensiones de conceptos son los cursos de valores de aquellas funciones que siempre tienen como valor un valor veritativo, dicha interpretación enfrenta graves problemas al tomar extensiones de conceptos como argumentos. Si estas últimas son objetos, entonces por el principio de

---

[253]Kneale (1962), pp. 430, 486.
[254]*KS*, p. 140.

completud, para todo concepto tiene que estar determinado si cualquier extensión de concepto cae o no bajo el mismo, incluyendo la extensión de dicho concepto mismo.

Para desgracia de Frege, dado lo anterior, se puede formular en el lenguaje lógico de *GgA* una fórmula bien formada a partir de la cual se puede derivar una contradicción, específicamente la llamada paradoja de Russell, y por lo tanto dicho sistema de Frege es inconsistente. Esto fue anticipado a Frege por Russell en una carta que le enviara este último con fecha del 16 de junio de 1902, poco antes de que Frege publicara en 1903 el segundo volumen de *GgA*.[255] En un apéndice a dicho volumen, Frege reconoció la inconsistencia que padecía su sistema lógico, ofreció su interpretación de dicha inconsistencia, e intentó elaborar una corrección.[256] Pero la misma fue hallada a su vez inconsistente.[257] Frege por su parte se mostró insatisfecho con los resultados de su proyecto logicista y nunca publicó un tercer volumen de *GgA*, el cual había pensado hacer. Habría que formular un sistema lógico de una manera más adecuada para entonces volver a retomar el proyecto logicista para la aritmética. A la misma vez, si bien, como lo ha expresado Hao Wang,[258] para Frege la teoría de conjuntos era concebida como parte de la lógica, puesto que la lógica fregeana pretende tratar de los conceptos y sus extensiones en el sentido más general, no debe extrañar que dicha inconsistencia afectase también el desarrollo de la teoría de conjuntos por parte de Cantor y Zermelo.[259] De hecho, la misma paradoja en cuestión había sido descubierta por Zermelo independientemente de Russell.

---

[255]*WB*, pp. 211-212.
[256]*GgA*, pp. 253-265.
[257]Ver Quine (1955), en Sluga (1993), pp. 71-85.
[258]Wang (1994), p. 269.
[259]Kneale (1962), pp. 652.

La paradoja que Russell comunicó a Frege puede ser derivada en el sistema de *GgA* por la siguiente razón. Si las extensiones de conceptos, es decir, si las llamadas también clases son objetos, entonces las funciones tienen que estar definidas para las clases como argumento (§10 *GgA*). Pues de toda función hay que preguntar por su valor para cualquier curso de valores como argumento, incluyendo el suyo propio. Por ende, para todo concepto tenemos que fijar para todo objeto si éste cae o no bajo el mismo, y puesto que las extensiones de conceptos son objetos, hay que preguntar para cualquier extensión de concepto si ésta cae o no bajo el mismo, incluyendo la suya propia. Entonces podemos distinguir entre un concepto cuya extensión caiga bajo el mismo, como '—ξ' (pues por el principio que Frege llama la amalgamación de los horizontales, '—ξ' equivale a '— —ξ') y un concepto cuya extensión no caiga bajo el mismo, como, e.g., la clase de los hombres.[260] La contradicción surge entonces el considerar al concepto de una clase que no pertenezca a sí misma.[261] La extensión de este concepto, si podemos hablar de su extensión, es la clase de las clases que no pertenecen a sí mismas.[262] La pregunta es si esta última clase pertenece o no a sí misma.[263] De cualquier respuesta se sigue su contraria.

Para evitar esta inconsistencia, Frege plantea primero que el restringir el uso de clases o extensiones como argumentos de funciones de primer orden, sería como restringir la aplicación a las mismas del principio del tercero excluido, el cual según él debe valer para todos los conceptos y relaciones. Si el mismo no vale en el caso de las clases, entonces estas no serían propiamente objetos.[264] Pues por el principio de completud, toda

[260] *GgA*, ii, p. 253.
[261] Ibid.
[262] Ibid.
[263] Ibid.
[264] Ibid.

función debe estar definida para todo objeto como argumento, incluyendo, por supuesto, los cursos de valores y las extensiones de conceptos.

Por otro lado, la adopción del principio de completud en las definiciones de funciones y en la subsiguiente aplicación de sus funciones veritativas primitivas y derivadas, sin duda fue un impedimento para que Frege interpretara su sistema lógico a la manera de la teoría de modelos.

También hay que señalar que Frege entendía que el principio de completud debía ser aplicado a la hora de definir las funciones típicamente aritméticas como la suma, la resta, la multiplicación, la potencia, etc. Así pues, según él, debía estar determinado el valor para una función binaria como "$\xi + \zeta$" o "$\xi < \zeta$" para todo objeto como argumento, sea éste un número o no. Si se limitase el dominio de los objetos que pueden ser argumentos de dichas funciones, entonces obtendríamos pseudorelaciones y no las relaciones propiamente de la lógica, las cuales deben estar precisamente delimitadas. Por otro lado, la aplicación misma de las leyes de la lógica presupone que las funciones, ora conceptos ora relaciones, estén bien delimitadas.[265]

Frege sostiene que si los conceptos y las relaciones no están completamente definidos, entonces los teoremas derivados quedan con una cierta incertidumbre.[266] Por ejemplo, si la suma no está definida para todo objeto como argumento, no podemos saber con certeza cuántas soluciones tiene la función "x + x = 1".[267] Según Frege, la función de la suma debe estar definida para todo objeto como argumento. Debe pues tener denotación una frase como "la suma de la luna y la luna", y de esta manera tendría un valor veritativo el enunciado "la suma de la luna y la luna es uno".[268] Como hemos señalado antes, Frege considera que todos los enunciados de su sistema deben

[265]Ibid., ii, §§62, 65.
[266]Ibid., ii, §61.
[267]Ibid., ii, §65.
[268]Ibid., ii, §64.

tener denotación, es decir deben denotar lo verdadero o lo falso. De lo contrario, serían semejantes a las oraciones como "Odiseo fue desembarcado en Itaca mientras dormía profundamente"[269] y "Scylla tenía seis cuellos de dragón",[270] las cuales no pertenecen a la ciencia, pues ni "Odiseo" ni "Scylla" tienen denotación, y por lo tanto los enunciados completos correspondientes tampoco.

Frege señala también, que no es posible restringir el dominio de los argumentos mediante estipulación. Suponiendo que estuviese definido apropiadamente el concepto de número, mediante lo cual se pueda decidir si un objeto dado cae o no bajo el mismo, entonces se podría sugerir una definición como "Si a y b son números, entonces a + b significa ...", llamada por Frege una definición condicional.[271]

En la §65, Frege nos dice que de su principio de completud para las definiciones se deriva el principio de referencialidad para los nombres de funciones, según el cual todo nombre de función debe tener una denotación.[272] Como vimos anteriormente, en la §28 del primer volumen de *GgA*, Frege había dicho que un nombre de función tenía denotación siempre y cuando tenga denotación el nombre propio que se origina mediante la colocación de nombres propios denotativos en cada uno de los lugares de argumentos. Por ende, puesto que no hay restricción para el tipo de nombre propio que puede ocupar cada lugar de argumento, que no sea la de que los lugares emparentados, sean ocupados por los mismos nombres propios, si un nombre de función tiene denotación, dicha denotación lo es una función definida para todo objeto como argumento.

---

[269] "*KS*, p. 148
[270] *GgA*, ii, §64.
[271] Ibid., ii, §65.
[272] Ibid., ii, §65.

En otro escrito, Frege sostiene que el principio de completud es necesario para evitar la falacia conocida como "Sorites", conocida también como el sofisma del montón, el cual se basa en el uso de los términos con imprecisión, y en especial en el uso de conceptos que no están bien delimitados.[273]

§15 El principio de referencialidad de los nombres

Para las definiciones dadas en el lenguaje objeto introducidas mediante el doble trazo de definición, Frege ofrece en la §28 de *GgA* una regla que llamaremos el principio de referencialidad. Nos dice:

> Para las definiciones, establezco ahora el siguiente principio supremo (*oberste*): Nombres correctamente construidos deben siempre denotar algo.[274]

En dicha sección, Frege nos aclara que llama nombres correctamente construidos a aquellos que consisten de signos ya sea primitivos o introducidos por medio de definiciones.[275] De manera que según este principio, los nombres de funciones veritativas primitivas deben siempre "denotar algo". Frege, sin embargo, no caracteriza en GgA lo que denotan los nombres de funciones, y de inmediato salta a ofrecer la manera de determinar si un nombre dado denota algo, ya sea éste un nombre propio o un nombre de función.

En la §29, Frege nos da dichas condiciones. En virtud de ellas, Dummett sostiene que Frege utiliza en *GgA* lo que dicho estudioso llama "el principio

[273] *NS*, p. 168.
[274] *GgA*, §28, p. 45.
[275] Ibid.

de contexto generalizado", puesto que vale tanto para nombres propios como para nombres de funciones.[276] En el caso de un nombre propio 'Δ', el mismo tiene denotación, cuando tiene siempre una denotación el nombre propio que se origina a partir de la colocación de 'Δ' en el lugar de argumento de un nombre denotativo de una función de primer orden con un argumento, y cuando tiene siempre denotación el nombre de una función de primer orden con un argumento que se origina mediante la colocación de 'Δ' en el lugar de argumento ξ de un nombre denotativo de una función de primer orden con dos argumentos, y cuando vale lo mismo para la colocación de 'Δ' en el lugar de argumento ζ.[277] Es decir que, puesto que los nombres propios que se generan al llenar el lugar de argumento del nombre de una función de primer orden con un argumento son nombres de uno de los dos valores veritativos, pues de tal manera se genera un enunciado, Frege propone como criterio de referencialidad para un nombre propio el hecho de que el mismo genere un enunciado, cuando se utiliza como nombre del argumento de una función de primer orden con un argumento, y de que el mismo genere una función de primer orden con un argumento, cuando se utiliza como nombre de uno de los argumentos de una función de primer orden con dos argumentos. Esto había planteado similarmente en su artículo "Sobre sentido y denotación", donde decía que en la oración "Odiseo fue desembarcado en Itaca mientras dormía profundamente", no se puede negar que:

> quien sostiene seriamente que la oración es verdadera o falsa, le atribuye también al nombre "Odiseo" una denotación y no sólo un sentido; pues

[276]Dummett (1991), pp. 211-212.
[277]*GgA*, §29, p. 46.

> es a la denotación de este nombre a la que se le atribuye o se le niega el predicado.[278]

En el caso de un nombre de una función de primer orden con un argumento '$\Phi()$', éste tiene denotación, cuando siempre tiene denotación el nombre propio que se origina a partir de '$\Phi()$' mediante la colocación de un nombre propio 'Δ' en el lugar de argumento, siempre que 'Δ' denote algo.[279] Es decir, que un nombre de función de primer orden con un argumento denota algo, siempre y cuando dicho nombre genere un enunciado mediante la colocación de un nombre propio denotativo en su lugar de argumento. Por su parte, un nombre de una función de primer orden con dos argumentos tiene denotación, si y sólo si tiene denotación el nombre propio que se genera a partir de dicho nombre de función mediante la colocación de nombres propios denotativos tanto en el lugar de argumento ξ como en el lugar de argumento ζ.[280] Un nombre '$M_\beta(\phi(\beta))$' de una función de segundo orden con un argumento del segundo tipo —es decir, que toma a una función como argumento—, tiene denotación, cuando se sigue en general a partir de que el nombre '$\Phi()$' de una función de primer orden denote algo, que el nombre propio '$M_\beta(\Phi(\beta))$' que se origina a partir de la colocación de '$\Phi()$' en el lugar de argumento de '$M_\beta(\phi(\beta))$' es un nombre denotativo.[281] Y similarmente, un nombre de una función de tercer orden tiene denotación, cuando se sigue generalmente a partir de que un nombre de una función de segundo orden con un argumento del segundo tipo denote algo, que el nombre propio que se origina mediante la colocación de dicha última función en el lugar de argumento de la función de tercer orden tiene una denotación.[282] En general,

---

[278] *KS*, p. 148.
[279] *GgA*, §29, p. 45-46.
[280] Ibid. p. 46.
[281] Ibid.
[282] Ibid.

entonces podemos decir que Frege entiende que un nombre funcional tiene denotación siempre que origine un nombre propio denotativo, ya sea mediante la colocación de nombres propios en el lugar o los lugares de argumento, como en el caso de los nombres de funciones de primer orden, o mediante la colocación de un nombre funcional del orden correspondiente en los lugares de argumento, como en el caso de los nombres de funciones de segundo y tercer orden.

Frege, como vemos, no caracteriza la denotación de los nombres para funciones más allá de ofrecer las condiciones para establecer si un nombre de función dado tiene o no denotación. Pero como Frege mismo señala, dichas condiciones no son ofrecidas en un sentido absoluto, pues en cada una de las estipulaciones que hemos citado, se presupone que haya por lo menos un nombre denotativo. Nos dice en la §30:

> Estas cláusulas no deben ser interpretadas como definiciones (*Erklärungen*) de las palabras 'tener una denotación', o 'denotar algo', puesto que ya su aplicación siempre presupone que se tienen reconocidos algunos nombres como denotativos.[283]

No obstante, dichas estipulaciones permiten ampliar el círculo de palabras denotativas.[284] Frege cree pues, que dados unos pocos nombres denotativos, se pueden construir a partir de ellos otros nombres con denotación. Dichas cláusulas sirven entonces para establecer que todo nombre construido a partir de nombres denotativos, denota algo.[285] Restaría establecer las reglas para construir nuevos nombres correctamente. Frege ofrece las mismas en la §30.[286]

---

[283]Ibid., §30, p. 46.
[284]Ibid.
[285]Ibid.
[286]Ibid., pp. 46-48.

Luego de establecer que tienen denotación tanto los nombres propios como los nombres de funciones que sean construidos correctamente a partir de algunos nombres primitivos denotativos, para poder demostrar que el principio de referencialidad vale para su sistema lógico, Frege pasa a demostrar en la §31 que los nombres primitivos de su sistema tienen denotación, pues todos los demás nombres que serán construidos a partir de ellos tendrán denotación en virtud de que ellos la tengan.[287] Frege pasa pues a demostrar que los nombres de las ocho funciones primitivas que se utilizan en *GgA* tienen denotación.

En el caso de las funciones veritativas de primer orden con un argumento, a saber, "—ξ" y el trazo de la negación, en virtud de las definiciones que expusimos antes, sus nombres generan un nombre propio que denota un valor veritativo para cualquier nombre propio denotativo que ocupe su lugar de argumento. Por lo tanto, dichos nombres son denotativos en virtud de las cláusulas de la §29. Sin embargo, Frege sostiene en este pasaje que sólo hace falta considerar dichas funciones con los dos valores veritativos como argumentos, pues hasta ese punto en *GgA*, no se conocen otros objetos.[288] Esta aclaración parece innecesaria, puesto que como vimos, Frege define sus funciones primitivas para todo objeto como argumento. De todos modos, es claro que los nombres de dos de las tres funciones primitivas de primer orden con un argumento tienen denotación. La tercera función de primer orden con un argumento '\ξ', que equivale según Frege al artículo determinado del lenguaje natural, tampoco presenta problemas, puesto que, por definición, ella tiene un valor para todo nombre denotativo como argumento.[289]

---

[287] Ibid., §31, p. 48.
[288] Ibid.
[289] Ibid., §11, pp. 18-20; §31, p. 50.

Lo mismo ocurre en el caso de las funciones primitivas de primer orden con dos argumentos, a saber, el condicional y la identidad. Ambas funciones por definición tienen un valor veritativo para cualquier combinación de argumentos. Por lo tanto, en virtud de las cláusulas de la §29, sus nombres tienen denotación. Frege, sin embargo, también evalúa a éstas sólo con los valores veritativos como argumentos. Pero nos parece que esto no es necesario, puesto que las definiciones para dichas funciones consideran a todo objeto como argumento de las mismas.

En el caso del cuantificador universal, Frege tampoco enfrenta problemas, puesto que el mismo es definido también para todo objeto como argumento, y su valor es siempre un valor veritativo. Como vimos, según las estipulaciones de la §29, un nombre de una función de segundo orden tiene denotación, si el mismo tiene denotación siempre que se coloque un nombre denotativo de función de primer orden en su lugar de argumento. El signo para el cuantificador universal, puesto que está definido para todo nombre de función de primer orden que se coloque en su lugar de argumento, tiene entonces denotación.

El principio de referencialidad no presenta problemas entonces con respecto a las funciones veritativas primitivas del sistema lógico de Frege, ni tampoco para '$\backslash\xi$'. Presenta dificultades, sin embargo, una de las funciones primitivas del sistema de Frege que, como '$\backslash\xi$', no es una función veritativa, a saber, la función '$\grave{\varepsilon}\ \phi(\varepsilon)$', la cual para cada función como argumento tiene al curso de valores de dicha función como valor. La misma ha sido llamada el operador de abstracción.[290] Según las cláusulas de la §29, dicha función de segundo orden tiene denotación si para toda función de primer orden que tome como argumento, ella origina un nombre propio que tiene una

[290]Ver, e.g., Dummett (1991), p. 121.

denotación, el cual en este caso sería siempre un curso de valores. Tal como el resultado de la colocación de un nombre denotativo apropiado en el lugar de argumento de una función veritativa genera un nombre propio que denota un valor veritativo, es decir, un enunciado, en el caso del operador de abstracción dicha colocación genera un nombre propio, pero no de un valor veritativo, sino de un curso de valores.

Podemos pues, reducir la pregunta de si la función de segundo orden '$\grave{\varepsilon}$ $\phi(\varepsilon)$' tiene o no denotación, a la pregunta de si tiene denotación el nombre propio que ella genera al ser llenado su lugar de argumento con un nombre denotativo de una función de primer orden. Pero para saber si un nombre propio tiene o no denotación, según la cláusula apropiada de la §29, hay que ver si dicho nombre genera un enunciado al ser colocado en el lugar de argumento de una función de primer orden con un argumento, y si genera un nombre denotativo de una función de primer orden con un argumento cuando es colocado en uno de los lugares de argumento de una función de primer orden con dos argumentos. Frege pasa entonces a examinar si los nombres propios de cursos de valores tienen denotación mediante dicho criterio, tomando en consideración solamente las funciones primitivas veritativas de su sistema.

Frege pasa primero a determinar si un nombre de curso de valores '$\grave{\varepsilon}$ $\Phi(\varepsilon)$' genera un nombre denotativo de una función de primer orden con un argumento a partir de la colocación de '$\grave{\varepsilon}$ $\Phi(\varepsilon)$' en uno de los lugares de argumento de la función primitiva de primer orden con dos argumentos '$\xi = \zeta$'.[291] Pero, a su vez, para determinar si el nombre de función que se genera, a saber, '$\xi = \grave{\varepsilon}$ $\phi(\varepsilon)$', tiene o no una denotación, según las cláusulas de la §29, hay que determinar si dicho nombre genera un enunciado para todo nombre

[291] *GgA*, §31, p. 49.

propio denotativo que se coloque en su lugar de argumento ξ. Puesto que Frege define a dicha relación de identidad diciendo que ella tendrá el valor de lo verdadero sólo en el caso de que las expresiones de ambos lados tengan la misma denotación, dicha determinación equivaldría a tener un criterio de identidad para los cursos de valores. Dicho criterio es dado por el principio V de su sistema, según el cual una identidad entre cursos de valores equivale a la generalidad de la igualdad entre dos funciones. Dicho principio estipula pues que '$\grave{\varepsilon}\ \Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$' es sinónimo de 'Para todo a, $\Psi(a) = \Phi(a)$'.

Pero saber el significado de '$\grave{\varepsilon}\ \Psi(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$' no implica que también sepamos el significado de '$\xi = \grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$', puesto que no todo objeto tiene que darse como denotación de un nombre de la forma '$\grave{\varepsilon}\ \Psi(\varepsilon)$'. Estamos pues, nuevamente ante el llamado problema de Julio César, el cual hizo que Frege modificara su estrategia de definir luego de haber hecho su primer y segundo intento de definir la frase "el número que pertenece al concepto F" en las §§56 y 66 de *GlA*.[292] En dicha obra, la solución a dicho problema consistió en estipular que el número que pertenece a un concepto F es la extensión del concepto 'equinumérico con el concepto F'. Pero puesto que no se ofreció una definición para la noción de extensión de concepto, dicha estipulación no bastaba para determinar si un objeto dado era o no el número que pertenece a un concepto dado. En *GgA*, Frege reconoce un problema al tratar la noción de curso de valores, en términos de la cual son definidas las extensiones de conceptos en dicha obra, pues nos dice que mediante la estipulación del principio V no se ha determinado completamente la denotación de un nombre como '$\grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$', que podríamos también expresar como 'el curso de valores de la función Φ'. En el principio V:

[292] *GlA*, §56, p. 68; §66, p. 78.

> Tenemos sólo un medio para reconocer un curso de valores, cuando éste esté designado por un nombre como '$\grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$', mediante el cual el mismo es reconocible como un curso de valores. Pero no podemos decidir aún, si un objeto, que no nos sea dado como un tal, es un curso de valores, y a cuál función él pertenece, ni tampoco podemos decidir en general, si un curso de valores dado tiene una propiedad dada, cuando no sabemos si dicha propiedad está relacionada con una propiedad de la función a la que pertenece.[293]

En *GgA*, Frege se limita a aplicar las cláusulas de la §29, que sirven para determinar si un nombre tiene o no denotación, pero que no precisan dicha denotación. Como vimos más arriba. Ellas sirven para determinar si '$\grave{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon)$' tiene o no denotación, pero no determinan dicha denotación. Sin embargo, Frege propone este procedimiento para dicho problema. Nos dice:

> ¿Cómo debe ser superada esta indeterminación? De la siguiente manera: determinando para cada función que sea introducida su valor para cursos de valores como argumentos, tal como para todos los otros argumentos.[294]

Esta prueba, según Frege, puede tomarse como una determinación (*Bestimmung*) de los cursos de valores.[295] En la §31, Frege pretende haber demostrado que la función veritativa de identidad tiene una denotación para nombres de cursos de valores como argumentos, y que por lo tanto los

[293] *GgA*, §10, p. 16.
[294] Ibid.
[295] Ibid., p. 18.

nombres de cursos de valores tienen denotación. Sin embargo, dicha prueba, en el caso precisamente de los nombres de cursos de valores, ha sido declarada inválida por más de un estudioso.[296] Según, pues, el propio principio de referencialidad de Frege, la introducción de los nombres para cursos de valores mediante la función de segundo orden '$\grave{\varepsilon}\ \phi(\varepsilon)$' es impropia. Y por lo tanto, no todos los nombres del sistema de Frege tienen denotación.

§16 Las definiciones en el lenguaje objeto

Un indicativo de que Frege distinguía claramente las definiciones del lenguaje objeto de todas las demás definiciones, es la distinción que observa en *GgA* con respecto a los términos *Bestimmung*, *Erklärung* y *Definition*. Si bien, como señaláramos en una nota en nuestro primer capítulo, Frege utilizaba dichos términos indistintamente en *GlA*, en *GgA* va a reservar el término *Definition* para las definiciones hechas en el propio lenguaje objeto que ofrece a partir de la §34, las cuales resume en una tabla al final del primer volumen,[297] mientras que utiliza *Bestimmung* y *Erklärung* para referirse a las definiciones de las nociones primitivas de la lógica que introduce en las §§5-13.

Para las definiciones en el lenguaje objeto, Frege introduce una notación que llama el doble trazo de la definición.[298] El mismo consiste de un signo del juicio con un doble trazo vertical. Cuando éste se usa, se indica que se está definiendo un nuevo signo, y que no se está juzgando.[299] Mas bien, mediante el mismo se fija el significado de un nuevo signo del lenguaje,

---

[296]Ver, p.e., Resnik (1986) en Haaparanta & Hintikka (1986), pp. 186-192; y Dummett (1991), pp. 215-222.
[297]*GgA*, pp. 240-241.
[298]Ibid., §27.
[299]Ibid.

mediante la estipulación de que este tenga el mismo sentido y la misma denotación que un signo compuesto a partir de otros signos conocidos.[300] De esta manera,

> el nuevo signo se convierte en sinónimo del [nombre previamente] definido; la definición pasa a ser inmediatamente un teorema. Podemos pues tratar una definición como un teorema y reemplazar al mismo tiempo el trazo de definición por el del juicio.

Por supuesto, solamente un tipo de juicio indica que dos signos tienen el mismo significado, a saber, un enunciado de identidad. Consecuentemente, Frege nos dice que una definición siempre tendrá la forma de una identidad con el trazo doble de definición antepuesto, a la izquierda de la cual estará el signo que define, el cual deberá estar compuesto de signos conocidos, y a la derecha de la cual estará el signo nuevo que es definido.[301]

Primeramente, hay que señalar que esta manera formal de definir es seguida por Frege sólo en el caso de las definiciones hechas dentro del lenguaje objeto. En particular, de esta manera se definen nociones aritméticas, a saber, el número que le corresponde a un concepto, la relación del sucesor inmediato de un número, el número cero, el número uno, el concepto de número infinito, que habían sido definidas anteriormente en *GlA* pero sin hacer uso de un lenguaje lógico. En ambas obras, dichas nociones aritméticas son definidas en términos de nociones puramente lógicas.

Si dichas definiciones son identidades, en donde se estipula la sinonimia entre dos signos o expresiones, entonces debe ser tomado en

---

[300] Ibid.
[301] Ibid.

consideración el carácter semántico de dicha sinonimia. Como hemos visto, en la §27 de *GgA*, Frege nos dice que las definiciones de su lenguaje expresan identidades triviales, puesto que ambas expresiones tienen tanto el mismo sentido como la misma denotación. Debido a que la semántica de Frege no reconoce como denotación de los enunciados otra cosa que no sea el valor veritativo, es claro pues, que en vista de su proyecto logicista, las definiciones en las cuales se determinase la equivalencia entre nociones aritméticas y nociones lógicas, tenían que ser identidades tanto de sentido como de denotación. Pues, según dicha teoría semántica, todos los enunciados verdaderos tienen una y la misma denotación, a saber, lo verdadero. Y por ende, el decir que un enunciado de la aritmética tiene la misma denotación que un enunciado de la lógica, nada implicaría para su tesis logicista. Entendemos pues, que Frege tiene que identificar tanto el sentido como la denotación de un signo nuevo con el de un signo conocido, en el caso de las definiciones del lenguaje objeto, en virtud de su proyecto logicista.

Sin embargo, dicha interpretación de las definiciones en el lenguaje objeto como identidades triviales, encuentra problemas cuando se consideran las definiciones de nuevos signos para funciones. Como hemos visto anteriormente, Frege entiende que dos nombres propios son sinónimos cuando ellos tienen la misma denotación, y en el caso de un nombre propio que es definido en términos de otro, ambos nombres tendrían tanto el mismo sentido como la misma denotación. Pero como vimos, Frege no nos presenta distintas expresiones funcionales que tengan una y la misma denotación. En este caso, si dos expresiones funcionales dadas tienen los mismos valores para cada argumento, entonces, por el principio V, ellas tienen un mismo curso de valores. Pero el curso de valores, según Frege, no es la denotación de las expresiones o nombres para funciones. Por lo tanto, la igualdad entre funciones no implica para Frege que dos expresiones funcionales tengan una y la misma denotación. Entonces debemos preguntarnos, cómo interpreta Frege las definiciones en el lenguaje objeto para nuevos signos de funciones, puesto que ha dicho que dichas definiciones asignan el mismo sentido y la misma denotación de un signo complejo conocido a un nuevo signo simple.

Frege pues, se ve obligado a hacer la salvedad de que, en el caso de una definición de un nombre para una función, la estipulación de identidad entre sentido y denotación se dará entre los nombres propios que se originen mediante la colocación de los argumentos apropiados en los lugares de argumentos. Nos dice que, en el caso del nombre de una función de primer orden con un argumento:

> La definición dice entonces que el nombre propio que se origina mediante la colocación de un nombre propio denotativo en el lugar de argumento, debe ser siempre sinónimo con el nombre propio que se origina a la izquierda mediante la colocación del mismo nombre propio en todos los lugares de argumento.[302]

Lo mismo vale, por supuesto, para las funciones de primer orden con dos argumentos.[303] Por ende, Frege no interpreta de la misma manera las definiciones de nombres propios para objetos y las definiciones de nombres para funciones. En el caso de las últimas, se estipula una sinonimia entre los nombres propios que los nombres para funciones generan, pero no entre ellos mismos.

[302]Ibid., §33, pp. 51-52.
[303]Ibid., p. 52.

Para las definiciones en el lenguaje objeto, vale el llamado por Frege principio de simplicidad del signo introducido, que ofrece en la §66 del segundo volumen *GgA*.[304] Según el mismo, el signo nuevo introducido mediante una identidad con el trazo doble de definición ante puesto debe ser simple. Para lo cual, Frege arguye que:

> Es evidente que a partir de la denotación de una expresión y la de una de sus partes, no está siempre determinada la de la parte que resta. Por ende, no se debe definir un signo o palabra mediante una definición de una expresión en donde dicho signo ocurra, cuando las partes restantes sean conocidas.[305]

Una aplicación de dicho principio, lo es el requerimiento de que los signos introducidos como nombres de funciones deben tener en sus lugares de argumentos, al ser definidos, variables que "indican indefinidamente" pero que no denotan ningún objeto en particular.[306] De hecho, al definir un nombre o signo funcional con sus lugares de argumento ocupados por nombres propios se estaría violentando el principio de completud para las definiciones, pues en tal caso se estaría definiendo dicha expresión sólo para los dos argumentos escogidos.

304 Ibid., ii, §66, pp. 79-80.
305 Ibid.
306 Ibid.

Capítulo III: Correspondencia con David Hilbert (1899-1900)

§17 Las críticas de Frege a David Hilbert

La más célebre formalización de ciencia alguna, el sistema axiomático para la geometría esbozado por Euclides en el libro conocido simplemente como *Los Elementos,* redactado en la ciudad de Alejandría alrededor del año 300 a.c., comienza ofreciendo, además de "axiomas" y "nociones comunes", definiciones de los términos para los elementos básicos constitutivos de dicha ciencia como "punto" y "línea". Sin embargo, veintitrés siglos más tarde ocurre una revolución en la fundamentación de la geometría liderada por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) y su libro *Los fundamentos de la geometría* publicado en 1899 (en lo sucesivo GG), en donde se abandona explícitamente la tarea de definir dichos términos. Hilbert desarrolla una axiomatización de la geometría que en tanto da por ciertos los axiomas de Euclides es euclidiana, pero que no obstante parte de términos pertenecientes a la geometría que no son definidos y son tomados como primitivos: "punto", "línea", "plano". De tal manera, abrió el camino para una concepción de la geometría como ciencia abstracta independiente de la naturaleza propia de los elementos denotados por sus términos primigenios. Interesantemente, en uno de los más importantes libros escritos bajo la influencia del rigor y el estilo del insigne libro euclidiano, los *Principios matemáticos de filosofía natural* de 1687, Isaac Newton había dejado sin definir propiamente las nociones de tiempo, espacio, lugar y movimiento, que eran centrales a dicho estudio del movimiento de los cuerpos, si bien ofreció unas notas de sus concepciones al respecto.[307] Pero no fue en definitivo hasta los trabajos de Hilbert y otros matemáticos como Giuseppe Peano que recibió un ataque

[307]Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* , *Scholium* .

sostenido la insistencia de Euclides de definir todo término de una ciencia formalizada.

Contrario a lo sugerido por la poca difusión original de sus escritos, Frege no pasó inadvertido por los más destacados estudiosos de los fundamentos de la lógica y de la matemática en su época. Además de su conocida correspondencia con Russell, Frege correspondió también con Edmund Husserl, David Hilbert, Leopold Löwenheim, y Giuseppe Peano, entre otros. En el caso de Hilbert, dicho intercambio se concentró en críticas que al mismo le hiciera Frege en torno a su tratamiento de las nociones de axioma y definición en su GG, el cual estaba basado en las notas de un curso ofrecido por Hilbert en la Universidad de Göttingen.[308]

En su primera carta al respecto con fecha del 27 de diciembre de 1899, Frege señala que, tal como le sugiriera su colega Thomae, no parecen claras las aseveraciones en GG sobre las definiciones y axiomas. Como señaláramos, Hilbert no define explícitamente los elementos básicos de la geometría. Tan sólo se limita a decir que los puntos, las líneas y los planos son tres tipos de objetos, los cuales son denotados por las letras A, B, C, ...; a, b, c, ...; y α, β, γ, ...; respectivamente.[309] No obstante, las críticas de Frege recaen en primer lugar sobre un señalamiento que hace Hilbert en GG acerca de las relaciones entre dichos elementos "yace", "entre", y "congruente". Según Hilbert, cada una de ellas es definida por un grupo de axiomas. La primera por los axiomas de incidencia, la segunda por los axiomas de orden, y la tercera por los axiomas de congruencia. Nos dice Hilbert:

---

[308]*WB*, pp. 55-80.
[309]GG, p. 3.

> Los axiomas de este grupo [axiomas de incidencia] establecen la relación de incidencia entre los objetos introducidos—puntos, líneas y planos...[310]

En cuanto al próximo grupo de axiomas nos dice:

> Los axiomas de este grupo [axiomas de orden] definen el concepto de "entre" y por medio de dicho concepto se hace posible el ordenamiento de puntos en una línea, en un plano, y en el espacio.[311]

Y finalmente en cuanto al tercer grupo de axiomas nos dice:

> Los axiomas de este grupo [axiomas de congruencia] definen el concepto de congruencia y, con éste, también el de desplazamiento.[312]

Esta estrategia de tomar a los grupos de axiomas como definiciones será objeto de severas críticas por parte de Frege. Para ello, Frege dará su concepción de lo que es una definición y luego de lo que es un axioma.

Según Frege le dice a Hilbert en su carta, para él una definición (*Definition*) introduce un signo, expresión o palabra, que previamente no tenía denotación, y que mediante la definición recibe una denotación.[313] Luego de estipulada una definición, la misma puede ser entendida como un enunciado evidente, tal como Frege considera que son los axiomas.[314] En una definición no se asevera nada, sino que algo se estipula.[315] No se debe tomar como una definición, algo que requiera una demostración o una

---

[310] Ibid.
[311] Ibid., p. 5.
[312] Ibid., p. 10.
[313] *WB*, p. 62.
[314] Ibid.
[315] Ibid.

fundamentación para establecer su verdad.[316] De inmediato Frege nos ofrece un ejemplo:

> Yo empleo el signo de igualdad como un signo de identidad. Tomemos como conocida de antemano la denotación del signo de suma, del signo del tres y del signo del uno, entonces podemos dar una denotación al signo del cuatro mediante la ecuación "3+1=4".[317]

Este ejemplo nos ilustra por qué Frege sostiene en dicha carta que una definición estipula la denotación de un signo, pero, sin embargo, no nos dice que también estipule el sentido del nuevo signo. Como vimos anteriormente, en la §27 de *GgA*, Frege había señalado que una definición en el lenguaje objeto de su sistema estipula que dos expresiones tendrán tanto el mismo sentido como la misma denotación. Y vimos también que por ello dichas definiciones se pueden luego considerar como identidades triviales, puesto que para Frege, la diferencia entre identidades triviales e identidades con algún valor cognoscitivo estriba precisamente en que en las primeras las expresiones en cuestión tienen el mismo sentido y la misma denotación, pero en las segundas tan sólo tienen la misma denotación y tienen distinto sentido. Pero al considerar la definición de "4" en términos de "3+1", Frege no puede decir que se está estipulando una identidad tanto de sentido como de denotación, puesto que a lo largo de sus escritos nos dice que la diferencia entre dos expresiones como "4" y "3+1" consiste precisamente en que ellas tienen distinto sentido. Por lo tanto, mediante dicha definición no se establece

---

[316]Ibid.
[317]Ibid.

una identidad trivial del tipo descrito, y no queda claro de qué manera la identidad resultante es "evidente" como dice Frege.

Frege continúa diciendo que los matemáticos deben distinguir entre las definiciones y todos los demás enunciados. Dice en la referida carta a Hilbert:

> Los demás enunciados (axiomas, leyes fundamentales [*Grundgesetze*], y teoremas [*Lehrsätze*]) no deben contener una palabra o signo, cuyo sentido y denotación, o cuya contribución a la expresión de un pensamiento no esté completamente determinada, de manera que no quede duda sobre el sentido de la oración, el cual es el pensamiento expresado.[318]

Según Frege pues, todos los enunciados de una ciencia formalizada, con la única excepción de las definiciones, deben estar constituidos por signos cuyo sentido y denotación sean conocidos, en virtud de lo cual se puede determinar cuál es el sentido del enunciado, al cual llama Frege el pensamiento. Como vimos, esta exigencia, que llamamos el principio de referencialidad, ya había sido ofrecida por Frege en la §28 de *GgA*, donde se dice que todo nombre correctamente construido en el lenguaje objeto debe tener una denotación.[319] En la §32 de *GgA*, también nos decía que el sentido de cada uno de los nombres constituyentes de un nombre de un valor veritativo, es decir, de un enunciado, es precisamente la contribución que hacen éstos para que la oración completa exprese un pensamiento.[320]

Según Frege, ni los axiomas y ni los teoremas pueden fijar la denotación de algún signo o palabra constituyente. Para obtener la denotación

---

[318]Ibid.
[319]*GgA*, §28, p. 45.
[320]Ibid., p. 51.

demostrar que todos y cada uno de sus símbolos primitivos tenían tanto sentido como denotación. En ningún momento se menciona allí, que meramente se quiere meramente señalar o apuntar hacia la denotación de dichos signos. A la misma vez, como vimos, las definiciones para las conectivas primitivas ofrecidas en las §§5-13 de *GgA* también estaban hechas en vista del principio de completud para las definiciones de conceptos.

Frege, como vimos, había dicho que en el caso de lo lógicamente simple, refiriéndose a las nociones de objeto y función no se podían ofrecer definiciones, sino que había que conducir con señas (*Winke*) al lector.[323] Mediante la referida nota al calce que aparece en el segundo volumen de *GgA*, Frege parece haber ampliado el dominio de lo indefinible a las nociones primitivas de su sistema, que si bien no son definidas dentro de su lenguaje objeto y por ende no son propiamente definiciones en sentido estricto, no obstante son aclaradas por Frege con mucho detenimiento y sin sugerir allí que no son completamente definibles.

En la carta a Hilbert, Frege nos dice que las oraciones explicativas son un tercer tipo de enunciado, las cuales no forman parte de la matemática, sino que pueden ser entendidas como parte de una introducción elemental (*Propädeutik*).[324] Ellas son similares a las definiciones, puesto que ambas tratan de la determinación de la denotación de un signo o palabra, y ambas contienen algo cuya denotación no está completamente clara. Nos dice Frege:

> Cuando nos encontramos con el caso de una denotación lógicamente simple, no se puede dar un definición propiamente, sino que se debe limitar a descartar (*abwehren*) las denotaciones no deseadas

[323]*KS*, p. 168.
[324]*WB*, p. 63.

> que se dan en el uso coloquial y a señalar (*hinweisen*) las deseadas, de manera que se debe contar ciertamente siempre con un entendimiento acomodaticio de carácter conjetural (*ein entgegenkommendes erratendes Verständnis*).[325]

Frege declara entonces que aquello que sea lógicamente simple no puede ser definido propiamente, y tiene por el contrario que ser señalado de una manera conveniente. Dada dicha indeterminación, dice Frege, las oraciones explicativas no pueden ser utilizadas en las demostraciones tal y como lo son las definiciones, puesto que no tienen la necesaria seguridad de estas últimas.

Por otro lado, en la misma carta, Frege le comunica a Hilbert lo que entiende por un axioma. Declara Frege:

> Yo llamo un axioma (*Axiom*) a enunciados que son verdaderos, pero que no pueden ser demostrados, porque su conocimiento proviene de una fuente de conocimiento (*Erkenntnisquelle*) completamente ajena a la de la lógica, la cual podemos llamar la intuición espacial (*Raumanschauung*).[326]

De inmediato saltan a la vista las raíces kantianas de esta aseveración. Nos parece interesante señalar de inmediato, que Frege sostenía que había demostrado que la concepción kantiana de la aritmética era insostenible, pero que en el caso de la geometría Frege nunca se distanció tajantemente del pensamiento de Kant. Este hecho ha dado pie a variadas interpretaciones kantianas de la filosofía de Frege. La distinción entre aritmética y geometría por parte de Frege, es evidente a partir de su uso de la terminología. En su

---

325Ibid.
326Ibid.

sistema lógico de *GgA*, Frege llama a los cinco axiomas de dicho sistema las leyes fundamentales (*Grundgesetze*), y no axiomas.[327] A partir de los mismos, de las "aclaraciones" de las conectivas primitivas, de definiciones, y de la regla de inferencia Modus Ponens, Frege deriva lo que llama las leyes fundamentales de la aritmética.

En ningún momento Frege hace uso significativo del término "axioma" en su proyecto logicista para la aritmética. Pero esto debe ser así en honor a la consistencia, en vista de la concepción de axioma que Frege le comunica a Hilbert en la referida carta. En el caso de las seis leyes fundamentales de su sistema lógico, Frege no sostiene ni que sean indemostrables ni que se fundamenten en la intuición como fuente de conocimiento. En el caso de dichas leyes fundamentales, Frege muestra que todas, con la única excepción de la quinta, son verdaderas en la §18 de *GgA*.[328] Y es precisamente el hecho de no poder demostrar la quinta ley fundamental, llamada comúnmente el principio V de *GgA*, sobre las dificultades del cual discutimos más arriba, el que lleva a Frege a dudar de su propiedad en plena introducción de *GgA*.[329] Las leyes fundamentales de la lógica no son escogidas por Frege por su indemostrabilidad, y de ahí que no las llamara axiomas de su sistema. A su vez, las leyes fundamentales de la aritmética son derivadas en *GgA* a partir de dichas cinco leyes lógicas primitivas. Por ende, para Frege, las leyes fundamentales de la aritmética no son indemostrables tampoco. Y por otro lado, en vista de la concepción antipsicologista de la lógica por parte de Frege, las leyes de la lógica no derivan de la intuición, y, por ende, tampoco las de la aritmética, puesto que se derivan de aquellas.

---

[327] *GgA*, §47, p. 60-61.
[328] Ibid., §18, p. 34.
[329] Ibid., VII.

Según Frege, de la verdad de un axioma se sigue que los axiomas no se contradicen unos a otros.[330] No hace falta mostrar, pues, que ellos no se contradicen.[331] En el caso de la aseveración de Hilbert en GG de que sus grupos de axiomas definen los términos desconocidos constituyentes, Frege declara que en el caso de un axioma, la denotación de las expresiones constituyentes tiene que ser comprendida de antemano, y por lo tanto es imposible que el mismo aclare o defina una de tales expresiones.[332] Frege le pregunta a Hilbert porqué éste no llama a sus axiomas definiciones, si es que pretende que ellos definan los términos primitivos que contienen.[333] Le exige pues Frege a Hilbert que distinga las definiciones de los axiomas, y que aclare lo que son para éste dichas nociones.

§18 La respuesta de Hilbert: primacía de la consistencia

Hilbert responde de inmediato a las críticas que le hiciera inicialmente Frege acerca de las definiciones y axiomas en GG. Según Hilbert en su carta del 29 de diciembre de 1899, el concepto de "entre" es definido por el grupo de los axiomas de orden.[334] Con mayor precisión, declara:

> "Entre" es una relación entre puntos de una línea, la cual tiene las siguientes notas características (*Merkmale*): II 1 ... II 5 [los axiomas II 1, II 2, ..., II 5].[335]

Puesto que Frege le había señalado en su carta que para definir un concepto o relación había que ofrecer las marcas características del mismo, Hilbert

---

[330]*WB*, p. 63.
[331]Ibid.
[332]Ibid.
[333]Ibid., p. 64.
[334]*WB*, p. 65
[335]Ibid.

responde que las mismas son precisamente los axiomas en donde dicho concepto ocurre. Por ende, los términos para funciones son definidos para Hilbert por los axiomas. En el caso de los nombres de conceptos como "punto, "línea", etc., que Frege señalara que necesitan también tener denotación, Hilbert sostiene que no desea que la denotación de los mismos esté comprendida de antemano. Esta precisamente es la tesis que lo separa tajantemente de la tradición milenaria en la geometría. Hilbert nos dice:

> [...], yo veo en mi definición (*Erklärung*) en la §1, la definición de los conceptos punto, línea, plano, cuando se toman en conjunto todos los axiomas de los grupos I-V como las notas características [de los mismos].[336]

Según Hilbert, definir "punto", por ejemplo, como algo que no tiene extensión, es buscar algo que no se puede encontrar nunca, pues "no hay nada ahí".[337] Entonces el significado de dicho término es dado contextualmente por el conjunto de axiomas que ofrece Hilbert. El carácter de dichos axiomas tan sólo debe estar de acuerdo con los hábitos de los matemáticos y los físicos, y ciertamente se debe poder variar los mismos.[338] Hilbert se muestra flexible en cuanto a los axiomas que pueden ser seleccionados, y por lo tanto también en cuanto al significado de los términos primitivos, puesto que sostiene que estos últimos son definidos o aclarados por aquellos. Esto sin duda responde a que el proyecto de Hilbert para la matemática, conocido como el formalismo, pretendía ser un desarrollo de los fundamentos de las matemáticas que tomara en cuenta el reciente desarrollo de las geometrías no-euclideanas.

---

[336]Ibid., p. 66.
[337]Ibid.
[338]Ibid.

La geometría como un conocimiento científico se había considerado basaba en premisas "evidentes". Tales premisas eran los postulados, también llamados axiomas, del célebre Euclides. Pero el quinto postulado, por alguna razón había incomodado siempre a los matemáticos y éstos desde muy temprano se habían dado a la tarea de demostrar su verdad. Tal tarea siempre resultó infructuosa. En 1733, el italiano Girolamo Saccheri intentó derivar una contradicción a partir de la negación de dicho postulado para así demostrarlo por reducción al absurdo, pero no logró completamente su cometido. Pues al negarlo, diciendo que hay más de una recta paralela a una recta dada a través de un punto que no está en dicha recta dada, no logró derivar una contradicción y tan sólo tomó por absurdo uno de los teoremas que sí derivó. Fue un matemático húngaro, János Bolyai, quien demostró para la segunda década del siglo diecinueve que el axioma de las paralelas podía ser negado sin contradicción, y por lo tanto que no es una premisa necesaria para toda geometría. Al mismo tiempo, el matemático ruso N.I. Lobachevski y el matemático alemán K.F. Gauss obtuvieron el mismo resultado. Más tarde, el matemático alemán B. Riemann sistematizó la pluralidad de geometrías resultantes. Habían pues, distintos sistemas axiomáticos para la geometría que, si bien eran cada uno tomado en sí mismo completamente consistentes, no eran sin embargo compatibles entre sí. El descubrimiento de las geometrías no euclidianas eliminó para siempre la superioridad lógica de la geometría euclidiana, y con ello el dogma de que la geometría es un modelo para el conocimiento que se quiera basar meramente en el fiel uso de la razón.

Se ha señalado que la concepción kantiana de la geometría ya combatía el carácter universal de la geometría euclidiana. La verdad de los axiomas de la geometría euclidiana no derivaba de principios lógicos, sino de nuestra experiencia, es decir, de la forma específica de nuestra intuición sensible. Decía Kant:

> El espacio no es más que la forma de todos los fenómenos de los sentidos externos, es decir la condición subjetiva de la sensibilidad. Sólo bajo esta condición nos es posible la intuición externa.[339]

Y más adelante distinguía nuestra intuición:

> En efecto, no podemos juzgar si las intuiciones de otros seres pensantes están sometidas a las mismas condiciones que limitan nuestra intuición y que tienen para nosotros validez universal.[340]

Por lo tanto, puesto que negar un axioma de la geometría no suponía para Kant una contradicción lógica, éste declaró sus axiomas y teoremas sintéticos a priori. Nos decía:

> El espacio del geómetra es exactamente la forma de la intuición sensible que encontramos a priori en nosotros, y contiene la condición de posibilidad de todos los fenómenos externos [...]. [Las proposiciones] son derivadas a partir de [esta] base subjetiva de todos los fenómenos [apariencias] externos, es decir, de la sensibilidad.[341]

La ausencia de una geometría lógicamente superior a las demás obligó a Hilbert y a otros matemáticos a buscar una fundamentación más allá de la verdad de los axiomas, puesto que dicha verdad parecía tener que ser determinada empíricamente, si los axiomas se tomaban como proposiciones

---

339Kant, *KrV*, A26/B42.
340Ibid., A27/B43.
341Kant, *Prolegomena*, §13, 288.

acerca del espacio real. Dicha fundamentación fue desarrollada por Hilbert con base en la noción de consistencia. En la referida carta a Frege, en respuesta a la aseveración de Frege de que la consistencia de los axiomas se deriva de su verdad, dice Hilbert:

> Cuando los axiomas arbitrariamente seleccionados no se contradicen unos con otros, entonces son verdaderos, y por ende existen las cosas (*Dinge*) que los axiomas definen. Este es para mí el criterio de la verdad y de la existencia.[342]

Según Hilbert, él mismo ya había utilizado esta concepción de existencia para sostener la tesis de que el sistema usual de los números reales existe, pero el sistema de potencias cantorianas no existe.[343] Es claro pues que Hilbert no proponía una concepción particular a la geometría, sino que buscaba desarrollar un programa abarcador de fundamentación tanto de la geometría como de la aritmética.

Según Hilbert, la definición de punto se sigue de la estructura completa de los axiomas.[344] Continuando con la analogía entre nota característica y axioma, él le comunica a Frege en su carta que cada axioma añade un elemento a la definición, y que por ende cada nuevo axioma cambia el concepto de "punto".[345] Por ende, dice Hilbert:

> "Punto" es cada vez algo distinto en la geometría euclidiana, en la no euclidiana, en la arquimediana, en la no arquimediana.[346]

---

[342]*WB*, p. 66.
[343]Ibid.
[344]Ibid.
[345]Ibid.
[346]Ibid., pp. 66-67.

Para Hilbert, existen distintos tipos de puntos, cada uno de los cuales está dado o definido por un sistema de axiomas consistente. Pero, al considerar un sistema de axiomas en específico, como por ejemplo el de GG, no se determina completamente lo que es un punto. Según Hilbert, cada teoría debe ser pensada como un esquema de conceptos conjuntamente con algunas relaciones entre ellos, lo cual permite que los elementos primitivos sean pensados de cualquier manera.[347] Hilbert interpreta dichos elementos como "sistemas de cosas", y declara:

> [...] Cada teoría puede ser aplicada (*anwenden auf*) siempre a infinitamente muchos sistemas de elementos fundamentales (*Grundelemente*).[348]

Según Hilbert, los elementos primitivos de una teoría deben ser entendidos como sistemas de cosas, para los cuales valen los axiomas de dicha teoría. Este enfoque rompe tajantemente con la interpretación tradicional de lo que es una teoría o una ciencia específica. Principalmente por la influencia de Aristóteles, cada ciencia se solía distinguir de las demás por su particular objeto de estudio. El programa de Hilbert, que también abarca las teorías científicas, entendía a todas las teorías como puros sistemas formales, en donde el significado de sus fórmulas no era esencial a los mismos. Le dice Hilbert a Frege:

> Lo que expresa una teoría de la electricidad vale naturalmente también para todo otro sistema de cosas, del cual se substituya en el lugar de los conceptos de magnetismo, electricidad, ..., siempre y cuando los axiomas requeridos sean satisfechos.[349]

[347]Ibid.
[348]Ibid., p. 67.
[349]Ibid.

Entonces, según Hilbert, se pueden considerar como puntos a cuerpos pequeños, y como líneas a rayos de luz, siempre y cuando se satisfagan los axiomas de la teoría en cuestión.[350]

§19 La respuesta de Frege: primacía de la existencia

Frege no tardó tampoco en responder a las aclaraciones que le hiciera Hilbert acerca de su concepción de lo que es una definición y lo que es un axioma. En una extensa carta con fecha del 6 de enero de 1900, Frege examina cuidadosamente lo planteado por Hilbert. En particular, Frege criticará agudamente las aseveraciones de Hilbert acerca de la consistencia como criterio de verdad y existencia.

En primer lugar, Frege señala que la existencia es un concepto de segundo orden, es decir, un concepto cuyo argumento es a su vez un concepto. Esta concepción de la existencia ya había sido discutida por Frege anteriormente.[351] En *GgA,* donde se define el cuantificador existencial en términos del cuantificador universal, este último es interpretado como un concepto de segundo orden.[352] Frege distinguía entre las propiedades de un concepto y las notas características del mismo. Como hemos visto, las notas características de un concepto son aquellas propiedades que debe tener un objeto para caer bajo dicho concepto. Pero dichas notas características no son a su vez propiedades del concepto mismo. Podemos distinguir propiedades que sí se adscriben a un concepto. Decía Frege en *GlA*:

> De manera que "rectángulo" no es una propiedad del concepto "triángulo rectángulo"; pero la

---

[350]Ibid.
[351]*GlA*, §53. Véase también, por ejemplo: "Über Begriff und Gegenstand", "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", y "Dialog mit Pünjer über Existenz".
[352]*GgA*, §8.

> proposición de que no existe ningún triángulo rectángulo, equilátero y rectilíneo expresa una propiedad del concepto "triángulo rectángulo, equilátero y rectilíneo", a saber, se le asigna el número cero.[353]

Según Frege, tanto el número como la existencia son nociones que se predican de conceptos. De hecho, afirmar la existencia no es otra cosa que negar el número cero.[354]

Frege encuentra que aquellos axiomas que predican la existencia de objetos son análogos al argumento ontológico para demostrar la existencia de Dios. Según Frege, la invalidez de dicho argumento es evidente, si se distingue entre conceptos de primer orden y conceptos de segundo orden. Por otro lado, puesto que Hilbert no hace dicha distinción, su práctica definitoria es comparable con la de dicho célebre argumento. En particular, Frege señala que los axiomas siguientes son impropios:

> I, 3: Existen por lo menos dos puntos en una línea. Existen por lo menos tres puntos que no están en una línea. [...] I, 8: Existen por lo menos cuatro puntos que no se hallan en un plano.[355]

Según Frege, dar a dichos enunciados el carácter de axiomas conjuntamente con otros axiomas de carácter no existencial sería como permitir el siguiente conjunto de axiomas:

> Axioma 1. Todo dios es todopoderoso.
>
> Axioma 2. Todo dios es omnipresente.

353*GlA*, §53.
354Ibid.
355GG, §2, p. 4.

Axioma 3. Existe por lo menos un dios.[356]

Según Frege, el error consiste en tomar un concepto de segundo orden, la existencia, como del mismo nivel que otros conceptos de primer orden, a saber, el concepto de todopoderoso y el concepto de omnipresente. Los conceptos de primer orden pueden ser notas características de conceptos de primer orden, puesto que ellos toman objetos como argumentos. Pero los conceptos de segundo orden son propiedades de conceptos de primer orden, pues toman a estos últimos como argumentos, y por ende no son notas características de conceptos de primer orden. Por lo tanto, el axioma 3 ofrecido por Frege, hace una aseveración acerca del concepto de dios, a saber, que cae por lo menos un objeto bajo el mismo. Pero, puesto que no ofrece ninguna nota característica de dicho concepto, no puede ser considerado parte de una definición del mismo. En efecto, Frege dirá más tarde, como veremos en el capítulo IV, que un concepto F de primer orden puede ser definido con base en la conjunción de varios conceptos del mismo nivel, los cuales mediante definición se toman como notas características de dicho concepto F. En este caso, el concepto de dios puede ser definido a partir de los conceptos de todopoderoso y omnipresente, los cuales mediante dicha definición pasan a ser las notas características del concepto de dios. Por otro lado, el axioma 3 que ofrece Frege, en analogía con los axiomas de carácter existencial que ofrece Hilbert, no puede ser utilizado para definir el concepto de dios, puesto que afirma una propiedad y no una nota característica de dicho concepto. Por lo tanto, según Frege, la existencia no puede ser introducida mediante definición.

---

[356] *WB*, p. 73.

Por otro lado, según Frege, ni la existencia ni la verdad pueden ser derivadas a partir de la consistencia. En primer lugar, a partir de las proposiciones:

1. A es un ser inteligente;
2. A es omnipresente;
3. A es todopoderoso,[357]

y del hecho que dichas propiedades son consistentes, es decir, no se contradicen ni permiten derivar una contradicción a partir de la conjunción de las mismas, no podemos inferir que existe un objeto con dichas tres propiedades. Según Frege, la única manera de demostrar que dichas propiedades no son contradictorias es mostrando un objeto que tenga las mismas.[358]

En cuanto a la tesis de Hilbert de que la verdad de los axiomas se sigue de su consistencia, Frege también se opone pues sostiene que si bien hay más de un sistema de axiomas de la geometría que es consistente, sólo el de la geometría euclidiana es verdadero. En *GlA*, él había dicho que solamente la geometría euclidiana se fundamentaba en la intuición.[359] Frege, si bien, como ha señalado Dummett,[360] no parece ser que haya seguido fundamentando la geometría euclidiana en la intuición, no obstante continuó sosteniendo que no es posible entender que más de una geometría es verdadera.[361]

---

[357]Ibid., p. 75.
[358]Ibid.
[359]*GlA*, §14, p. 20-21.
[360]Dummett: "Frege on Kant and Geometry".
[361]*NS*, p. 183.

Capítulo IV: *"Logik in der Mathematik"* (1914)

§20 Las definiciones como estipulaciones arbitrarias

El tema de las definiciones es retomado por Frege en un artículo publicado póstumamente, titulado *Logik in der Mathematik*, el cual fue escrito alrededor del 1914. En dicho artículo, habiendo ya fracasado su proyecto logicista para la aritmética, Frege habla de la importancia de la lógica para la matemática. En el mismo distingue Frege dos tipos de inferencia: uno que deriva a partir de una premisa que ya se ha tomado como verdadera, y otro que hace lo mismo a partir de dos premisas. La conclusión que derivan ambos tipos de inferencia puede ser llamada un teorema, y éste a su vez puede servir de premisa para otras inferencias. Pero hay premisas que no son teoremas, es decir, que no se obtienen por medio de los dos tipos de inferencia mencionados: los axiomas, los postulados, y las definiciones.[362]

Según Frege, el sistema de la matemática consiste primariamente en un conjunto de verdades que no han sido inferidas o demostradas, a partir del cual se genera toda la matemática, formando un sistema de verdades conectadas por inferencias lógicas.[363] Las verdades de la matemática, dice, deben pertenecer a un orden que las unifique a todas. Es imperante, pues, analizar las inferencias que se dan en la matemática y descubrir las verdades primitivas en las que ellas se apoyan como premisas. Para ello, no se pueden confundir las premisas con las leyes de inferencia, puesto que estas últimas son puramente lógicas.

Tal como le comunicara a Hilbert, Frege entiende que los axiomas son pensamientos verdaderos que no pueden ser demostrados mediante

[362] *NS*, p. 220.
[363] Ibid., p. 221.

inferencias dentro de un determinado sistema. Es posible, sin embargo, que una proposición dada pueda servir tanto de axioma como de teorema dentro de un sistema. Esta posibilidad ya había sido considerada en la antigüedad, pues para el axioma de las paralelas se habían encontrado varios substitutos interderivables con el mismo, como por ejemplo la proposición de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es equivalente a la suma de dos ángulos rectos. Entonces, hay un cierto grado de arbitrariedad a la hora de escoger los axiomas. Frege nos dice:

> El que una verdad sea un axioma depende por ende del sistema, y es posible que una verdad sea un axioma en un sistema y no en otro.[364]

La distinción entre teorema y axioma se debe hacer relativa a un sistema en particular. Por otro lado, para Frege, no es correcto hablar de axiomas falsos, puesto que sólo es lícito seleccionar como axiomas a pensamientos evidentemente verdaderos.

Según Frege, los postulados son procedimientos auxiliares que hacen posible una demostración. Pero Frege no se refiere a procedimientos externos o físicos, sino conceptuales. Los postulados son verdades tal como los axiomas, y su única particularidad es que afirman la existencia de algo con ciertas propiedades, como por ejemplo, que dados dos puntos hay una línea recta que los une. Según Frege, los postulados podrían considerarse como casos especiales de axiomas.

Frege pasa entonces a examinar la noción de definición. De inmediato él nos dice que hay que distinguir a las definiciones de las aclaraciones o explicaciones (*Erläuterungen*). Según Frege:

---

[364]Ibid.

> La ciencia necesita términos técnicos que tengan denotaciones fijas y determinadas, y para poder llegar a un acuerdo sobre estas denotaciones y para evitar malentendidos, hay que dar aclaraciones.[365]

Las aclaraciones utilizan las palabras del lenguaje natural y por ende nunca llegan a tener el rigor que se debe exigir. Sin embargo, según Frege, en la práctica se puede hacer entender sobre la denotación de las palabras primitivas de un sistema. Pero dicha falta de rigor, implica que las aclaraciones son previas a la construcción del sistema.[366] Según Frege:

> Al construir un sistema se debe suponer que los términos tienen denotaciones precisas y que sabemos cuales son.[367]

Es claro pues, que Frege ya no intentaría definir precisamente todos los términos de un sistema, puesto que los términos primitivos no pueden ser definidos, sino aclarados. Más aun, Frege nos dice que se debe suponer que todo término tiene una denotación. Esto último representa un giro a partir de la redacción del primer volumen de *GgA*. En las §§28-32 de dicha obra, como viéramos, Frege había intentado demostrar, si bien infructuosamente, que todo nombre primitivo de su sistema era denotativo, y que por ende todo nombre correctamente construido a partir de aquéllos era denotativo también. Esta exigencia, que llamáramos el principio de referencialidad, es considerada ahora como un supuesto, pero no como un metateorema demostrable.

Frege entiende por una definición una estipulación que concierne sólo al ámbito de los signos. Las definiciones son pues estipulaciones arbitrarias

---

[365]Ibid., p. 224.
[366]Ibid.
[367]Ibid.

mediante las cuales un nuevo signo es introducido para tomar el lugar de una expresión compleja cuyo sentido conocemos a partir de cómo dicha expresión esté compuesta, es decir, a partir de los sentidos de sus partes. El nuevo signo pasa a tener el sentido del signo complejo. Puesto que al introducir un nuevo signo mediante definición no se altera el contenido, las definiciones son inesenciales para el sistema. Según Frege, las definiciones hacen más fácil la expresión.

Una vez asignada una denotación a un signo mediante definición, dicha definición pasa a ser un enunciado de identidad trivial, que no amplía nuestros conocimientos.[368] Según Frege, no es posible demostrar un teorema a partir de una definición, que sin ella no sea demostrable. El *definiendum* y el *definiens* pasan a ser intercambiables sin alterar el sentido, es decir, el pensamiento de la expresión en donde aparezca una de ellas. Ciertamente cambiaría la expresión, pero de ninguna manera cambia su sentido, es decir, el pensamiento que ella expresa.

Según Frege, si bien las definiciones no tienen ningún valor desde un punto de vista lógico, es decir, deductivo, sin embargo ellas tienen un valor psicológico. Frege dice que desde un punto de vista psicológico, inclusive pueden ser necesarias. Nos ofrece el ejemplo de la palabra "integral". Según él, aún cuando sepamos completamente el sentido de dicho termino, normalmente no estamos conscientes del mismo. Según Frege:

> Nuestra consciencia no es suficientemente abarcadora. Frecuentemente necesitamos utilizar un signo con el cual asociamos un sentido muy complejo. Un tal signo, para decir así, nos sirve como un recipiente, dentro del cual podemos llevar

[368]Ibid., p. 225.

> con nosotros siempre en la consciencia dicho sentido [...].[369]

En el caso de pensamientos complejos, Frege sostiene que los mismos regularmente no se encuentran claros en todas sus partes en nuestra consciencia.[370]

§21 La distinción entre definiciones constructivas y definiciones analíticas

Como hemos visto, Frege considera que las definiciones propiamente son una suerte de abreviatura que facilita el manejo de sentidos complejos. Pero Frege considera también la situación inversa. Podría ocurrir que un término haya sido usado por mucho tiempo con un sentido simple, pero que luego dicho sentido sea analizado en partes más simples. Si luego de dicho análisis se define a partir del viejo signo un nuevo signo complejo que corresponde a las partes que surgieron del análisis, entonces estamos ante un particular tipo de definición. Como Frege mismo advierte, en este caso sí sería posible derivar un teorema que no pudiese ser derivado previo a la definición.

Frege distingue pues entre definiciones constructivas y definiciones analíticas. En las definiciones constructivas (*aufbauende*):

> (1) Construimos un sentido a partir de sus constituyentes e introducimos un nuevo signo para expresar dicho sentido.[371]

Según Frege, éstas son propiamente las definiciones. Por otro lado, Frege llama definiciones analíticas (*zerlegende*) a aquellas en donde se parte de un signo simple que ha estado previamente en uso y mediante un análisis lógico

---

369Ibid., p. 226.
370Ibid.
371Ibid., p. 227.

del mismo se obtiene una expresión compleja con el mismo sentido.[372] Frege hace la salvedad de que los componentes de la expresión compleja resultante deben tener un sentido por sí mismos, además de que el sentido de la misma debe ser obtenible a partir de su composición.

Según Frege, puesto que en el caso de las definiciones analíticas ambos signos tienen un sentido conocido de antemano, el simple porque ya estaba en uso y el complejo por ser interpretado a partir del sentido de sus constituyentes, no estamos entonces ante definiciones propiamente dichas. No hay lugar para una estipulación arbitraria del sentido de un signo, y en general no hay margen para la arbitrariedad. A su vez, el valor de una definición analítica puede ser significativo. Es posible que se pueda derivar algún teorema que sin ella no sea derivable. Frege sin embargo señala, que es muy difícil hacer un análisis del sentido de un signo simple que ya esté en uso.

Señala Frege, que es preferible introducir un signo nuevo mediante una definición constructiva para expresar el sentido de un signo complejo conocido, a tratar de establecer que un signo simple que ya está en uso tiene o no el mismo sentido que una expresión compleja dada. De tal manera, la pregunta por el sentido del signo simple que ya estaba en uso puede ser dejada a un lado. Si por alguna razón fuese conveniente seguir utilizando el signo simple que ya tenía sentido, entonces debemos asignarle el sentido de una expresión compleja y entenderlo como un nuevo signo que adquiere un sentido mediante definición. De tal modo, deja de importar el sentido que dicho signo tenía previo a la definición, y su sentido debe ser el asignado por la definición.

[372]Ibid.

La razón por la cual Frege recomienda que se introduzcan signos nuevos mediante definiciones constructivas, en vez de analizar signos simples para definirlos en términos de expresiones complejas mediante definiciones analíticas, lo es el hecho de que no podemos captar con claridad el sentido de un signo simple. Si bien el sentido de un signo complejo es obtenible, según Frege, a partir de los sentidos de sus constituyentes, tal no es por supuesto el caso con los signos simples. Sólo son necesarias las definiciones analíticas cuando se intenta aclarar el sentido de los signos simples primitivos del sistema. En este caso, dice Frege, el análisis lógico del sentido es muy útil. Pero Frege aclara que dicho análisis no forma parte de la construcción del sistema y por lo tanto debe darse con anterioridad a dicha construcción.[373]

§22 Definiciones de conceptos y relaciones

Según Frege, los conceptos pueden ser definidos en términos de otros conceptos. De hecho, nos dice:

> El caso más simple de la definición de un concepto
> lo es cuando un concepto se combina con otro para
> formar un nuevo concepto.[374]

Como viéramos, esto equivale a tomar a los conceptos combinados como notas características del concepto definido. Frege nos ofrece el siguiente ejemplo:

a es un cubo

y = *a* es un cubo positivo

a es positivo.[375]

---

[373]Ibid., p. 228.
[374]Ibid., p. 246.
[375]Ibid., p. 247.

Aquí se define el concepto expresado a la derecha en términos de la conjunción de los dos conceptos que se hallan a la izquierda. Frege ofrece una restricción a este tipo de definición que ya había considerado en la §33 de *GgA*: al lado derecho sólo debe aparecer un lugar de argumento *a*. Si esto no se cumpliera, entonces el concepto en cuestión no estaría bien definido, puesto que dichos lugares de argumento podrían ser llenados con distintos argumentos, para lo cual el concepto no estaría definido, y por lo tanto, se violaría el principio de completud para las definiciones.

En las definiciones para conceptos, se estipula que una expresión conceptual tendrá el mismo sentido que otra expresión conceptual. Por ejemplo, en:

Si *a* es un múltiplo de
un entero mayor que 1,
entonces *a* es dicho
entero,
y = *a* es un número primo
a es un entero,
a es mayor que 1.[376]

En este caso se dice, según Frege, que no importa el nombre denotativo que se substituya por *a*, tanto la expresión a la derecha como la expresión compleja a la izquierda tendrán un mismo sentido. Tal como en *GgA*, Frege también exige de todo concepto, que esté definido para todo objeto como argumento. En el caso de un concepto, que Frege entiende como un tipo de función, esto equivale a decir que dicha función tendrá un valor veritativo como valor para cualquier objeto como argumento. El caso de las relaciones es análogo al de los conceptos, pues estas se distinguen de ellos por tener más de

[376]Ibid.

un lugar de argumento. Sus definiciones sólo deben contener dos lugares de argumento en el lado derecho, es decir, en el *definiendum*, tal como Frege exigiese en la §33 de *GgA*.

BIBLIOGRAFIA

Textos originales de Gottlob Frege:

Begriffsschrift und andere Aufsätze. 1879-1882. I. Angelelli, ed. Hildesheim: G. Olms, 1964.

Die Grundlagen der Arithmetik Eine logisch mathematische Unterschung über den Begriff der Zahl. 1884. Centenarausgabe. Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von Christian Thiel. Hamburg: Meiner, 1986.

Grundgesetze der Arithmetik. 1893, 1903. I & II Band. Hildesheim: G. Olms, 1966.

Kleine Schriften. I. Angelelli, ed. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967.

Nachgelaßene Schriften. H. Hermes, F. Kambartel and F. Kaulbach, eds. Hamburg: Felix Meiner, 1969.

Wissenschaftlicher Briefwechsel. Gottfried Gabriel, et al., eds. Hamburg: Felix Meiner, 1976.

Traducciones y antologías de las obras de Frege:

Frege, Gottlob. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System.* trans. M. Furth. Los Angeles: University of California Press, 1964. Trad. del prefacio, introducción, y §§1-52 de *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903).

___. *Conceptual Notation and Related Articles.* Translated and edited with a biography and introducction by Terrell Ward Bynum. Oxford: Clarendon Press, 1972. Trad. de *Begriffsschrift,*

___. *Lógica y Semántica.* Alfonso Gómez-Lobo, Introducción, traducción y selección bibliográfica. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 1972. Contiene en traducción española, entre otros: "Función y concepto" (1891), "Sobre sentido y denotación" (1892), "Sentido y denotación de las palabras de concepto" (1892-95), y "Sobre concepto y objeto" (1892).

___. *Fundamentos de la Aritmética: Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Jesús Mosterín, trad. y prólogo. Estudio de Claude Imbert. Barcelona: Laia, 1972. Trad. de *Grundlagen der Arithmetik*.

___. *Estudios sobre semántica*. Jesús Mosterín, intro. y trad. 2da ed. Barcelona: Ariel, 1973. Contiene en traducción española: "Función y concepto", "Sobre sentido y referencia", "Consideraciones sobre sentido y referencia", "Sobre concepto y objeto", el prólogo y la introducción de *Grundgesetze der Arithmetik*, y "¿Qué es una función?".

___. *Escritos lógico-semánticos*. Carlos R. Luis and Carlos Pereda, trad. Madrid: Tecnos, 1974. Contiene en traducción española: "Función y concepto"(1891), "Sobre sentido y significado"(1892), "Aclaraciones sobre sentido y significado"(1892-95), "Sobre concepto y objeto"(1892), "¿Qué es una función?"(1904), "La lógica en la matemática"(1914), y cuatro investigaciones lógicas, a saber, "El pensamiento"(1918-19), "La negación"(1918-19), "Articulación de pensamientos"(1923-26), y "Generalidad lógica".

___. *Posthumous Writings*. Hans Hermes, Friedrich Kambartel and Friedrich Kaulbach, eds. trans. by Peter Long and Roger White. Oxford: Blackwell, 1979. Esta traducción casi completa de *Nachgelaßene Schriften* contiene, entre muchos otros, trad. de "Logik in der Mathematik" (1914).

___. *The Foundations of Arithmetic: A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*. J. L. Austin, trans. second revised ed. Evanston, Illinois: Northwestern University Press, 1980. Trad. de *Grundlagen der Arithmetik*. También existe una edición bilingue en aléman e inglés: *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. J. L. Austin, trans. second revised ed. Oxford: Blackwell, 1978.

___. *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Peter Geach and Max Black, eds. third ed. Oxford: Blackwell, 1980. Contiene en trad. inglesa: "Function and Concept" (1891), "On Sense and Reference" (1892), "On Concept and Object" (1892), y partes de *Grundgesetze der Arithmetik*.

___. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Gottfried Gabriel, et al., eds. trans. Hans Kaal. Chicago: University of Chicago Press, 1980. Trad. de *Wissenschaftlicher Briefwechsel*.

___. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. Brian McGuinness, ed. Oxford: Blackwell, 1984.

Escritos de otros autores:

Angelelli, Ignacio. *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1967.

Avila del Palacio, Alfonso. "Sobre la noción fregeana "extensión de concepto"." *Anâlisis Filosôfico* 8.1 (1988): 19-35.

___. "La definición de número en Gottlob Frege." *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía* XXIV.72 (1992): 73-101.

Benacerraf, P. "Frege: The Last Logicist." en *The Philosophy of Frege*. Sluga, ed. New York: Garland, 1993. 211-229.

Benacerraf, Paul. "What Numbers Could Not Be." *Philosophical Review* 74 47-73. Tamb. en Paul Benacerraf and Hilary Putnam, 272-294.

Benacerraf, Paul and Hilary Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics*. second ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Carnap, Rudolf. "The Logicist Foundations of Mathematics." en Benacerraf and Putnam, *Philosophy of Mathematics* 41-52.

Church, A. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: Princeton University Press, 1956.

Coffa, J. Alberto. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

Dejnozka, Jan. "Frege on identity." *International Studies on Philosophy* 13 (1981): 31-42.

___. "Frege: Existence Defined as Identifiability." *International Studies in Philosophy* 14 (1982): 1-18.

Dudman, V. H. "Frege on Definition." *Mind* 82 (1973): 609-610.

Dumitriu, Antón. "The Logical Mechanism of Mathematics." *International Philosophical Quarterly* 21 (1981): 405-418.

Dummett, Michael. "Frege on the Consistency of Mathematical Theories." en Schirn, *Studien zu Frege* Vol. I 1976. tamb. en Sluga, *The Philosophy of Gottlob Frege* 179-192.

___. "Nominalism." *Philosophical Review* 65 (1956): 491-505. tamb. en Klemke, *Essays on Frege* 321-336.

—. "Frege, Gottlob." *Encyclopedia of Philosophy*. P. Edwards, ed. New York: Macmillan, 1962.

—. "Frege." *Teorema (Universidad de Valencia)* 2 (1975): 149-188.

—. *The Interpretation of Frege's Philosophy*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1981.

—. *Frege: Philosophy of Language*. 2nd ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1981, [1973].

—. "Frege and Kant on Geometry." *Inquiry* 25 (1982): 233-254. Tamb. en Sluga, *The Philosophy of Gottlob Frege* 247-268.

—. *Frege and Other Philosophers*. Oxford: Clarendon Press, 1991.

—. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1991.

Goodstein, R. "The Definition of Number." *Mathematical Gazette* 41 (1957): Leicester, England: Leicester University Press, 1965. Tamb. en R. Goodstein, *Essays in the philosophy of Mathematics*.

Grossmann, R. *Reflexions on Frege's Philosophy*. Evanston: Northwestern University Press, 1969.

Haaparanta, L. and J. Hintikka, eds. *Frege Synthesized: Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*. Synthese Library. Volume 181. Jaakko Hintikka ed. Holland: D. Reidel, 1986.

Hambourger, Robert. "A Difficulty with the Frege-Russell Definition of Number." *Journal of Philosophy* 74 (1977): 409-414.

Heath, T. *A History of Greek Mathematics: From Thales to Euclid*. vol. I of 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921.

Heck Jr., R. G. "Michael Dummett's Frege." *Philosophical Quarterly* 43.2/3 (1993): 115-146.

Hilbert, David. *Foundations of Geometry*. trans. of *Grundlagen der Geometrie* (1899) by Leo Unger. second english edition revised and enlarged. Paul Bernays ed. La Salle, Illinois: Open Court, 1971.

Hodes, Harold. "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic." *The Journal of Philosophy* 81 (1984): 123-149.

Horty, John F. "Frege on the Psychological Significance of Definitions." *Philosophical Studies* 72.2&3 (1993): 223-263.

Kant, Immanuel. *Prolegomena to any Future Metaphysics*. trans. by Lewis White Beck. Richardson et al., eds. New York: Macmillan, 1950.

___. *Critique of Pure Reason*. trans. by Lewis White Beck. London: Macmillan, 1956.

Klemke, E. D., ed. *Essays on Frege*. Chicago: University of Illinois Press, 1968.

Kluge, E. H. W. *The Metaphysics of Gottlob Frege: An Essay in Ontological Reconstruction*. The Hague: Nijhoff, 1980.

Kneale, W. C. and M. Kneale. *The Development of Logic*. London: Oxford University Press, 1962.

Martin, Edwin. "Frege's Definition of Numbers." *Philosophical Papers* 16 (1987): 59-73.

Mohanty, J. N. *Husserl and Frege*. Bloomington: Indiana University Press, 1982.

Oliver, A. "Dummett and Frege on the Philosophy of Mathematics." *Inquiry* 37.3 (1994): 349-392.

Ortiz Hill, Claire. *Word and Object in Husserl, Frege and Russell*. Athens, Ohio: Ohio University Press, 1991.

___. "Frege's attack on Husserl and Cantor." *Monist* 77.3 (1994): 345-357.

Peano, Giuseppe. "Risposta ad una lettera di G. Frege: Preceduta dalla lettera di Frege." *Opere Scelte*. Roma: Edizioni Cremonese, 1958. Vol. II. 288-296. Orig. en *Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica)* VI (1896-1899): 53-61.

___. "Le definizioni in matematica." *Opere Scelte*. Roma: Edizioni Cremonese, 1958. Vol. II. 423-435. Orig. en *Periodico di Matematiche*, serie VI, Vol. I (1921): 175-189.

Quine, W. V. "On Frege's Way Out." *Mind* 64 (1955): 145-159. Tamb. en Sluga. *The Philosphy of Frege*. vol. 2. 71-85.

Resnik, Michael D. "Frege's Context Principle Revisited." en Schirn, *Studien zu Frege* Vol. III.

___. "Frege's Proof of Referentiality."*Frege Synthesized*. L. Haaparanta and J.Hintikka, eds. 177-195.

___. "The Role of the Context Principle in Frege's Philosophy." *Philosophy and Phenomenological Research* 27 (1967): 356-365.

___. "The Frege-Hilbert Controversy." *Philosophy and Phenomenological Research* 34 (1974): 386-403. tamb. en Resnik, *Frege and the Philosophy of Mathematics* 106-118; y en Sluga, *The Philosophy of Gottlob Frege* Vol. I 130-147.

___. "The Philosophical Significance of Consistency Proofs." *Journal of Philosophical Logic* 3 (1974): 133-147.

___. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca: Cornell University Press, 1980.

Rosado Haddock, Guillermo E. "Identity Statements in the Semantics of Sense and Reference." *Logique et Analyse* 100 (1982): 399-411.

___. "Remarks on Sense and Reference in Frege and Husserl." *Kant-Studien* 73.4 (1982): 425-439.

___. *Exposición crítica de la filosofía de Gottlob Frege*. Santo Domingo, R.D.: Corripio, 1985.

___. "On Frege's Two Notions of Sense." *History and Philosophy of Logic* 7 (1986): 31-41.

___. "El Frege kantiano." *Diálogos* 65 (1995): 189-212.

Ruffino, Marco Antonio. "Review of "Frege: Philosophy of Mathematics"." *Manuscrito* 6.2 (1993): 151-168.

Russell, Bertrand. *Introducción a la filosofía matemática*. Mireia Bofill, trad. 1ra ed. Barcelona: Paidós, 1988. Trad. de *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919).

Salmon, Wesley. *Frege's Puzzle*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1986.

Schirn, M., ed. *Studien zu Frege*. 3 vols. Stuttgart: Bad Cannstadt, 1976.

___. "Frege on the Purpose and Fruitfulness of Definitions." *Logique et Analyse* 125-126 (1989): 61-80.

___. "Axiom V and Hume's Principle in Frege's Foundational Project." *Diálogos* 66 (1995): 7-20.

Scriven, Michael. "Definitions in Analytical Philosophy." *Philosophical Studies* 5 (1954):.

Sluga, Hans. *Gottlob Frege*. The Arguments of the Philosophers. Ted Honderich ed. London: Routledge, 1980.

___, ed. *The Philosophy of Frege*. 4 vols. New York: Garland, 1993.

Snapper, John W. "Contextual Definition: What Frege might have meant but probably didn't." *Nous* 8 (1974): 259-272.

Van Heijenoort, J., ed. *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

Thiel, Christian. *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*. Tecnos: Madrid, 1972. Trad. de *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges*. Meisenheim am Glan: A. Hain, 1965.

Wagner, Steven. "Frege's Definition of Number." *Notre Dame Journal of Formal Logic* 24 (1983): 1-21.

Weiner, Joan. "The Philosopher behind the Last Logicist." *Philosophical Quarterly* 34 (1984): 242-264. tamb. en Wright, *Tradition and Influence* 57-79. y en Sluga, *The Philosophy oof Gottlob Frege*. vol. 2. 269-292.

___. *Frege in Perspective*. Ithaca: Cornell University Press, 1990.

Wright, Crispin. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Great Britain: Aberdeen University Press, 1983.

___. *Frege: Tradition and Influence*. Oxford: Blackwell, 1984.